Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. Ю. Левин

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Ярославль, Рыбинск
2010

УДК 517.925.56, 517.926.4, 517.948.3, 519.658
ББК В 1
Л 36

Л е в и н А. Ю. Избранные труды / Ответственный редактор
Л 36 С. Д. Глызин — Ярославль; Рыбинск: Рыбинский Дом печати, 2010. — 320 с.
ISBN 978-5-88697-206-1

Настоящее издание представляет собой сборник трудов известного математика, профессора Анатолия Юрьевича Левина (1936 – 2007).

Представлены работы по основным направлениям научной деятельности А.Ю. Левина: теория обыкновенных дифференциальных уравнений, функциональный анализ, методы оптимизации, эвристические алгоритмы, теория вероятностей и математическая статистика.

Для широкого круга специалистов, аспирантов, студентов, интересующихся качественной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и методами оптимизации

Ил. 1.

УДК 517.925.56, 517.926.4,
517.948.3, 519.658
ББК В 1

ISBN 978-5-88697-206-1

Оглавление

Предисловие

Анатолий Юрьевич Левин — разносторонний математик. В область его интересов входили теория обыкновенных дифференциальных уравнений, функциональный анализ, методы оптимизации, теория вероятностей и математическая статистика, эвристические алгоритмы и многое другое. Во всех этих областях он получил яркие результаты.

По мнению редколлегии, на основании данного тома читатель может составить представление о вкладе А. Ю. Левина в математику. Отметим, что при этом остались незатронутыми многие темы его исследований — функциональный анализ, теория графов, методы решения сложных экстремальных задач. Работы расположены в хронологическом порядке. Ссылки в этом предисловии на статьи данного тома выделяются жирным шрифтом (например, **1**) в отличие от ссылок на статьи из списка литературы в конце предисловия, которые приводятся в квадратных скобках.

К задаче о поведении решений дифференциальных уравнений второго порядка А. Ю. Левин обращался неоднократно. В первой работе этого цикла (см. [1]) был получен интегральный принцип сравнения решений двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$x_1'' + \varphi_1(t)x_1 = 0, \quad x_2'' + \varphi_1(t)x_2 = 0,$$

который для неотрицательных функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ является далеко идущим обобщением классической теоремы сравнения Штурма. Этот принцип стал новым аппаратным средством для исследования качественных свойств решений уравнений второго порядка. В работе, с которой начинается этот том избранных трудов, интегральный принцип сравнения был использован для исследования устойчивости решений уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

А. М. Ляпунов (см. [2]) провел глубокое исследование задачи об устойчивости решений уравнения второго порядка

$$x'' + q(t)x = 0, \tag{1}$$

где $q(t)$ — периодическая функция с некоторым периодом ω. Отметим, что для уравнения (1) устойчивость решений следует из ограниченности решений при $t \geqslant 0$. Ляпунов рассмотрел уравнение

$$x'' + \lambda q(t)x = 0, \tag{2}$$

где $\lambda > 0$ — параметр, $q(t) \geqslant 0$, $q(t) \not\equiv 0$. Он показал, что положительная полуось разбивается на интервалы

$$0 < \lambda_1' \leqslant \lambda_1'' < \lambda_2' \leqslant \lambda_2'' < \lambda_3' \leqslant \lambda_3'' < \ldots,$$

где $0, \lambda_2', \lambda_2'', \lambda_4', \lambda_4'', \ldots$ — корни уравнения $A(\lambda) = -1$, а $\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_3', \lambda_3''$ — корни уравнения $A(\lambda) = 1$. Здесь $A(\lambda)$ — целая аналитическая функция (ее значения — постоянные Ляпунова для соответствующих уравнений), которая определяется уравнением

$$A(\lambda) = \frac{y_1(\omega) + y_2'(\omega)}{2},$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения уравнения (2) с начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Интервалы $(0, \lambda_1')$, $(\lambda_1'', \lambda_2')$, $(\lambda_2'', \lambda_3'), \ldots$ являются интервалами ограниченности решений. Остальные интервалы, включая $(-\infty, 0)$, являются интервалами неограниченности решений. Интервал $(0, \lambda_1')$ называется нулевой зоной устойчивости.

Отметим, что В. И. Арнольд [3] привлек внимание к вопросу о критериях (необходимых и достаточных условиях) устойчивости по Ляпунову особых точек автономных систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров. Он построил пример системы трех дифференциальных уравнений с четырьмя параметрами, для которой критерий устойчивости нулевого решения не является алгебраическим (одна из компонент границы области устойчивости определяется аналитической функцией). Линейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка (2) доставляет пример уравнения с одним параметром, для которого критерий устойчивости является трансцендентным ($A(\lambda)$ — аналитическая функция).

Первые достаточные условия устойчивости для уравнения (1) были установлены Ляпуновым. Сформулируем его результат.

Решения уравнения (1) *ограничены, если*

$$q(x) \geqslant 0, \quad q(x) \not\equiv 0, \quad \int\limits_0^\omega q(s)ds \leqslant \frac{4}{\omega}.$$

М.Г. Крейн [4] показал, что для устойчивости решений уравнения (1) достаточны следующие менее ограничительные условия:

$$\int\limits_0^\omega q(s)ds \geqslant 0, \quad q(x) \not\equiv 0, \quad \int\limits_0^\omega [q(s)]_+ ds \leqslant \frac{4}{\omega},$$

где

$$[q(t)]_+ = \begin{cases} q(t), & \text{если} \quad q(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{если} \quad q(x) < 0. \end{cases}$$

Условия устойчивости другого типа были получены Н. Е. Жуковским, В. А. Якубовичем, З. Опялем (см. литературу к статье **2**).

А. Ю. Левин в статье **2** получил новое неравенство, дающее оценку снизу для расстояния между нулями нетривиальных решений уравнения (1). Доказательство опирается не только на интегральный принцип сравнения, но и на изучение «предельного» уравнения с коэффициентом $q(t)$, представляющим собой сумму непрерывной функции и некоторого числа дельта-функций. Из этого неравенства, в частности, следует условие ограниченности решений уравнения (1)

$$\int\limits_{t}^{t+\omega/n} q_+(t)dt \leqslant \frac{c_n}{\omega}, \quad c_n = 2n\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right). \tag{3}$$

При $n = 2$ получим, что неравенство из условия устойчивости Ляпунова—Крейна

$$\int\limits_0^{\omega} [q(s)]_+ ds \leqslant \frac{4}{\omega}$$

можно заменить неравенством

$$\int\limits_{t}^{t+\omega/2} [q(s)]_+ ds \leqslant \frac{4}{\omega}. \tag{4}$$

Этот результат неулучшаем. При других значениях n получаются многие другие условия устойчивости — Жуковского, Якубовича, Опяля. Теорема Левина об оценке расстояния между нулями может быть применена также для получения достаточных условий устойчивости для других зон устойчивости. К сожалению, полные доказательства теорем из краткой заметки **2** содержатся только в докторской диссертации А. Ю. Левина и, следовательно, недоступны широкой математической общественности.

В 2005 году Ю. С. Колесов [5] опубликовал доказательство того, что неравенство (4) влечет устойчивость решений уравнения (1), опирающееся на идеи теории оптимального управления.

Первые работы А. Ю. Левина в области дифференциальных уравнений были посвящены многоточечной краевой задаче. Эта задача состоит в следующем. Найти решение уравнения

$$L(x) \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(a_1) = A_1$, $x(a_2) = A_2$, …, $x(a_n) = A_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные точки интервала $[a, b]$. Функции $p_1(t)$,

$p_2(t), \ldots, p_n(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[a, b]$. Промежуток $[a, b]$ называется промежутком неосцилляции оператора L, если каждое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет на $[a, b]$ не более $n - 1$ нулей. Оказывается,что многоточечная краевая задача имеет единственное решение в том и только в том случае, когда промежуток $[a, b]$ является промежутком неосцилляции для оператора L. Первый эффективный критерий неосцилляции был установлен Валле-Пуссеном. В краткой работе в Докладах АН СССР Левин анонсировал, а в работе **2**, приведенной в этом томе, изложил полное доказательство оценки дифференцируемой функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных (теорема 1). Эта оценка неулучшаема. С помощью этой оценки Левин получил критерий неосцилляции существенно более общий, чем критерий Валле-Пуссена. Отметим, что метод доказательства оценки дифференцируемой функции представляет определенный интерес. Для доказательства исследуются крайние точки конечномерных функциональных множеств определенного типа. Этот метод, по-видимому, может быть использован для получения оценок такого рода.

А. Ю. Левин в **2** получил также оценку дифференцируемой функции без предположения о монотонности расположения нулей последовательных производных. Естественно, эта оценка является более грубой, так как накладывает меньше ограничений на рассматриваемую функцию. Позднее выяснилось, что эта оценка появилась в работе С. Н. Бернштейна, опубликованной в 1950 году. Другая оценка дифференцируемой функции получена в совместной работе Г. А. Бессмертных и А. Ю. Левина [6]. Авторы предложили два различных доказательства этой оценки. Доказательство А. Ю. Левина основывается на исследовании крайних точек функциональных множеств, доказательство Г. А. Бессмертных основано на интегральном представлении функции $x(t)$.

В следующей работе **3** рассматривается классическая задача об оценке поведения собственных значений интегрального уравнения Фредгольма в зависимости от свойств гладкости ядра. Первые указания об оценках собственных чисел содержатся еще в фундаментальной работе И. Фредгольма [7]. Эта задача исследовалась в работах Э. Хилле и Я. Тамаркина [8] и А. О. Гельфонда [9]. А. Ю. Левин, используя некоторые приемы, предложенные А. О. Гельфондом, и новые соображения, получил значительно более точные оценки собственных значений интегрального уравнения Фредгольма

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) d\mu(s).$$

На основе этого результата получены оценки собственных значений линейных краевых задач Штурма—Лиувилля для уравнений n-го порядка.

Оценкам снизу сингулярных чисел (и, следовательно, оценкам сверху собственных значений) интегральных операторов посвящена большая работа М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [10]. В этой работе разработаны новые методы получения оценок собственных значений широкого класса интегральных операторов. Остается неясным, следуют ли оценки, полученные в работе **3**, из оценок статьи [10].

Следующая работа Анатолия Юрьевича **4** является самой знаменитой его работой. К сожалению, признание выдающейся роли этой работы в линейном и выпуклом программировании сильно запоздало. Об этом подробно написал В. М. Тихомиров [11] (см. также [12]). В этой работе предложен алгоритм центрированных сечений для нахождения минимума выпуклой функции на ограниченном выпуклом множестве в конечномерном пространстве. Через 17 лет после выхода статьи **4** было доказано, что алгоритм, предложенный А. Ю. Левиным, имеет полиномиальную скорость в задаче линейного программирования (см. [13]).

В работе **5** рассматривается поведение решений уравнения

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad (-\infty < a \leqslant t < b \leqslant \infty) \tag{5}$$

в неколебательном случае (т.е. в случае, когда каждое нетривиальное решение уравнения (5) имеет на интервале $[a, b)$ конечное число нулей) при $t \to b$. Проведена полная классификация всех возможных ситуаций и составлена таблица, описывающая все случаи поведения решений. Таким образом, задача решена с исчерпывающей полнотой. Тема закрыта. Работа подводит итог большому числу исследований в этой области.

Следующая работа А. Ю. Левина **6** является фундаментальным вкладом в теорию неосцилляции решений для уравнения

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0, \quad (-\infty \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant \infty) \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами.

Как отмечает А. Ю. Левин, целый комплекс внешне разнообразных вопросов — дифференциальные неравенства, представление оператора L в виде произведения n вещественных дифференциальных операторов первого порядка, разрешимость интерполяционных краевых задач, вопросы перемежаемости нулей, ляпуновские зоны устойчивости для уравнения Хилла, свойства чебышевских и декартовых систем функций, осцилляционность (по Гантмахеру—Крейну) функций Грина краевых задач, теоремы о среднем значении и т.п. — все это самым тесным образом связано с вопросом о неосцилляции решений уравнения (6). Поэтому вопрос о неосцилляции решений является одним из центральных в качественной теории уравнения (6).

В этой статье установлен общий критерий неосцилляции для уравнения (6) в терминах существования n функций с определенными свойствами.

При $n = 2$ этот критерий переходит в классический критерий Валле-Пуссена. Различные конкретизации соответствующих функций приводят к улучшению и обобщению известных ранее признаков неосцилляции. Получен и новый эффективный признак неосцилляции. Сформулируем его.

Если корни $\lambda_i(t)$ уравнения

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t) = 0$$

при всех $t \in (-\infty, \infty)$ вещественны и разделены постоянными, то $(-\infty, \infty)$ — промежуток неосцилляции для оператора L.

Отметим, что в 1968 году появилась небольшая заметка американского математика Ф. Хартмана [14] (автора фундаментальной монографии по теории обыкновенных дифференциальных уравнений), в которой для уравнений n-го порядка был анонсирован результат, описанный выше. Однако формулировка признака неосцилляции в заметке Ф. Хартмана была не вполне корректна. Статьи А. Ю. Левина и Ф. Хартмана поступили в соответствующие журналы почти одновременно. Статья с доказательствами анонсированных Ф. Хартманом утверждений появилась в 1969 году.

Книга известного математика В. А. Коппеля [15] в большой степени посвящена изложению результатов А. Ю. Левина в теории неосцилляции. Должным образом оценивается и приведенный выше признак неосцилляции решений уравнений n-го порядка.

Работа **7** посвящена теории игр. По-видимому, это одна из первых работ, в которой обращается внимание на роль фактора времени в игре двух лиц. В дальнейшем идея учета времени в теории игр получила широкое развитие и вылилась в новую математическую дисциплину — динамическую (или эволюционную) теорию игр, в которой частоты стратегий зависят от времени. В последние 10 лет по динамической теории игр написано огромное число работ и более 10 монографий.

Статьи **8** и **9** посвящены общей теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В первой части первой из них речь идет о разрешимости начальной задачи для уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x(t) + p_{n+1}(t) = 0, \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{7}$$

где $-\infty < a < b < \infty$. Предполагается, что коэффициенты уравнения (7) могут иметь несуммируемые особенности в точке a. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости начальной задачи для уравнения (7) с начальными данными, заданными в точке a. Из этого критерия непосредственно вытекает результат, существенно усиливающий результаты Э. Хилле по асимптотике решений уравнения второго порядка. Во второй части работы **8** исследуется следующая классическая задача. Рассматривается последовательность матричных уравнений

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k + F_k, \quad X_k(a) = C, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При каких условиях на матрицы $A_k(t)$, $B_k(t)$ последовательность матриц-решений $X_k(t)$ равномерно сходится на конечном промежутке $[a, b]$ к матрице $X_0(t)$? Установленная в статье общая теорема для скалярного уравнения n-го порядка дает необходимые и достаточные условия сходимости.

В статье **8** предполагалось, что коэффициенты рассматриваемых уравнений являются суммируемыми. В статье **9** рассматриваются уравнения с обобщенными (разрывными) коэффициентами. В основу кладется следующий подход к понятию решения уравнения с обобщенными коэффициентами (коэффициенты — производные функций ограниченной вариации). Матрица коэффициентов аппроксимируется последовательностью матриц с непрерывными элементами (поточечная сходимость). Рассматривается последовательность аппроксимирующих уравнений. Устанавливаются необходимые и достаточные условия на матрицу обобщенных коэффициентов, при которых решения аппроксимирующей последовательности уравнений сходятся к некоторому пределу, который и принимается за решение уравнения с обобщенными коэффициентами.

Отметим, что различные способы определения решений уравнений с обобщенными коэффициентами предлагались В. Феллером, И. Курцвейлем, Ф. Аткинсоном и другими математиками. В частности, большое внимание этому вопросу уделяется в монографии Ф. Аткинсона [16]. А. Ю. Левин показал (на примере), что подход Аткинсона может приводить к неправильному результату, в то время как его подход дает верный ответ.

В работе **10** рассматривается задача линейного быстродействия. Один из методов решения этой задачи сводит задачу к решению уравнения Л. Нейштадта. Численные методы решения уравнения Л. Нейштадта разрабатывались на основе градиентного спуска. А. Ю. Левин предлагает использовать для численного решения уравнения Нейштадта алгоритм центрированных сечений, предложенный им ранее для решения задачи выпуклого программирования. Метод обладает существенными преимуществами перед методами, примененными ранее В. Г. Болтянским и др.

Идеи, изложенные в этой работе, развивались в дальнейшем в совместных работах А. Ю. Левина и его ученицы Т. И. Енчевой и в диссертации А. А. Бузинова — ученика А. Ю. Левина.

Работа **11** примыкает к работам **8, 9**. Здесь рассматриваются матричные и скалярные уравнения с суммируемыми коэффициентами, зависящими от скалярного параметра ε. Исследуется вопрос о сходимости на конечном промежутке $[a, b]$ решений $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ к решению $x(t, 0)$ предельного уравнения. Для скалярного уравнения n-го порядка указаны необходимые и достаточные коэффициентные условия для сходимости решений в пространстве W_p^{n-1}, $p \geqslant 2$. Обсуждается также подобный вопрос для скалярных уравнений с коэффициентами, которые являются производными функций из L_2.

Работы **12-13**, написанные совместно с Г. Д. Степановым, представляют собой одну большую работу, которая по требованию журнала разбита на две части. Это исследование — дальнейший шаг в развитии комплекса вопросов, связанных с теорией неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений.

Исследованию спектральных свойств краевых задач для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка посвящено значительное число работ. Уже в классических работах по интегральным уравнениям прослеживается связь между спектральными свойствами краевых задач и спектральными свойствами интегральных уравнений, ядрами которых являются функции Грина этих краевых задач. О. Келлог выделил класс ядер, содержащих функции Грина задачи Штурма—Лиувилля, для которых спектр задачи

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)q(s)x(s)ds$$

обладает такими же осцилляционными свойствами, как и спектр краевой задачи Штурма—Лиувилля.

Ядром Келлога называется вещественное симметричное ядро $K(t,s)$ при условии, что символы Фредгольма удовлетворяют неравенствам

$$K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} > 0.$$

Исследования интегральных операторов с ядрами типа ядер Келлога были существенно продвинуты в работах Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна, которые рассмотрели также случай несимметричных ядер. Отметим, что результаты для несимметричных ядер в основном изложены в кратких заметках в Докладах АН СССР (см. список литературы в **12-13**). Важным следствием этих работ о ядрах Келлога является возможность выявить широкие классы краевых задач, обладающих осцилляционными свойствами.

В первой части работы (см. статью **12**) исследуются общие спектральные свойства интегральных операторов, не повышающих числа перемен знака, вида

$$\mathbf{K}x = (\mathbf{K}x)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)d\sigma(s)ds,$$

а именно вещественность и простота собственных значений, число и перемежаемость нулей собственных функций, интерполяционные свойства собственных функций и т.д. Симметричность ядра не предполагается. Рассматривается класс ядер, включающих функции Грина двухточечных краевых задач.

Во второй части работы (см. статью **13**) рассматриваются краевые задачи с распадающимися (с точностью до линейного комбинирования) краевыми условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка ($n \geqslant 2$). Для такого класса краевых задач получен эффективный «коэффициентный» признак того, что интегральный оператор, обратный дифференциальному, обладает свойством не повышения числа перемен знака. Это приводит в свою очередь к эффективным коэффициентным условиям, обеспечивающим наличие у двухточечной краевой задачи с распадающимися условиями комплекса свойств, характерных для классической задачи Штурма—Лиувилля. Полученные условия открывают возможность эффективного использования численных методов для подтверждения того, что данная задача является задачей со штурм-лиувиллевскими свойствами.

Результаты работы **12-13** получили развитие в статье Г. Д. Степанова [17].

В работе **14** в стохастической постановке рассматривается задача о реализуемости многопродуктового потока (реализуемость плана перевозок на данной сети). В этой постановке дается асимптотический критерий реализуемости плана.

Работа **15** — последняя работа А. Ю. Левина, посвященная теории неосцилляции решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Рассматривается класс уравнений

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0, \quad t \geqslant t_0 > -\infty,$$

определяемый неравенствами $0 < a_i \leqslant p_i(t) \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Класс соответствующих операторов L обозначается через $\Omega(a, b)$. Ставится следующая задача. При каких условиях решения любого уравнения из рассматриваемого класса не колеблются (имеют конечное число нулей) и стремятся к нулю при $t \to \infty$? Это свойство решений названо абсолютной неосцилляционной устойчивостью по аналогии с понятием абсолютной устойчивости решений дифференциальных уравнений. В теории неосцилляции такая постановка задачи является новой.

Отметим, что постановка задачи перекликается с постановкой задач в робастной теории управления, когда исследуются свойства устойчивости относительно не индивидуальной системы, а некоторого класса систем.

В статье получены эффективные необходимые и достаточные условия абсолютной неосцилляционной устойчивости в терминах требования вещественности корней двух многочленов с коэффициентами из чисел a_i, b_i. Класс операторов L из $\Omega(a, b)$, удовлетворяющих этим условиям, обозначается через $\Omega^r(a, b)$.

При $L \in \Omega^r(a, b)$ имеет место более сильное свойство, чем абсолютная неосцилляционная устойчивость. Промежуток $[t_0, \infty]$ является промежутком неосцилляции для оператора L, в частности, каждое решение уравнения $Lx = 0$ имеет менее n нулей на $[t_0, \infty)$. Устойчивость решений носит экспоненциальный характер.

Аналогичные результаты получены для уравнений класса $\Omega(a,b)$, если вместо условия $x(t) \to 0$ выполняется условие $|x(t)| \to \infty$.

Исследуются некоторые другие свойства операторов $L \in \Omega(a,b)$: поведение решений на всей числовой оси, разрешимость неоднородных уравнений $Lx = f(t)$, спектральные свойства двухточечной краевой задачи с оператором L. В конце статьи намечается программа дальнейших исследований, связанных с применением операторов из Ω^r к теории чебышевских систем, теоремам сравнения, оптимальному управлению, нелинейным краевым задачам. Эта программа пока не реализована.

Работа **16** — это обобщение теоремы В. Л. Харитонова [18] на некоторый класс нестационарных систем. Не учитывая некоторые предварительные результаты, началом теории робастной устойчивости является теорема Харитонова [18]. Для класса линейных систем с постоянными коэффициентами, где коэффициенты принадлежат некоторым интервалам $[a_i, b_i]$, получены необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах гурвицевости восьми многочленов, коэффициентами которых являются числа a_i, b_i. В статье **16** теорема Харитонова распространяется на класс нестационарных систем с медленно меняющимися в определенном смысле коэффициентами.

А. Ю. Левин в течение многих лет размышлял над многими вопросами математической статистики. Итогом этих размышлений явилась статья **17** (краткое изложение результатов содержится в заметке [19]).

Существует много критериев проверки однородности выборки, например критерий Н. В. Смирнова проверки однородности двух независимых выборок, который излагается во многих книгах по математической статистике. Проверка однородности состоит в проверке того, что две независимые выборки являются выборками из одной генеральной совокупности. Все известные критерии относятся к одномерным выборкам. В работе А. Ю. Левина впервые был предложен критерий однородности для многомерных выборок. Именно, рассматривается $m \geqslant 2$ независимых выборок в n-мерном пространстве. Формулируется и доказывается состоятельный непараметрический критерий гипотезы о равенстве почти всюду плотностей вероятностей соответствующих выборок.

Литература

1. *Левин, А. Ю.* Об одном принципе сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1960. — Т. 135, № 4. — С. 783—786.
2. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 473 с.

3. *Арнольд, В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд // *Функц. анализ и его прил.* — 1970. — Т. 4:3. — С. 1—9.
4. *Крейн, М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости / М. Г. Крейн // *ПММ.* — 1951. — Т. 15, вып. 3. — С. 323—348.
5. *Колесов, Ю. С.* О доказательстве теоремы Левина о полупериоде / Ю. С. Колесов // *Дифференциальные уравнения.* — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1181—1184.
6. *Бессмертных, Г. А.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г. А. Бессмертных, А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 471—474.
7. *Fredholm, E. I.* Sur une classe d'equations fonctionnelles / E. I. Fredholm // *Acta Math.* — 1903. — Vol. 27. — P. 365—390.
8. *Hille, E.* On the characteristic values of linear integral equations / E. Hille, J. D. Tamarkin // *Acta Math.* — 1931. — Vol. 57. — P. 1—76.
9. *Гельфонд, А. О.* О росте собственных значений однородных интегральных уравнений / А. О. Гельфонд // Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гостехиздат, 1957. — С. 233—263.
10. *Бирман, М. Ш.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // *УМН.* — 1977. — Т. 32, № 1(193). — С. 17—84.
11. *Тихомиров, В. М.* Об А. Ю. Левине и его творчестве / В. М. Тихомиров // Математика, кибернетика, информатика : тр. междунар. научн. конф. памяти А. Ю. Левина / Под ред. С. А. Кащенко, В. А. Соколова. — Ярославль: Яросл. гос. ун-т, 2008. — С. 5—13.
12. *Tikhomirov, V. M.* The evolution of methods of convex optimization / V. M. Tikhomirov // *Am. Math. Mon.* — 1996. — Vol. 103, no. 1. — P. 65—71.
13. *Yamnitsky, B.* An old linear programming problem runs in polynomial time / B. Yamnitsky, L. A. Levin // 23rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 3-5 November 1982, Chicago, Illinois, USA. — IEEE, 1982. — P. 327—328.
14. *Hartman, P.* Disconjugate n-th order differential equations and principal solutions / P. Hartman // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 74. — P. 125—129.
15. *Coppel, W. A.* Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220 / W. A. Coppel. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1971. — 147 p.
16. *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 748 с.

17. *Степанов, Г. Д.* Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функций Грина двухточечных краевых задач / Г. Д. Степанов // *Матем. сб.* — 1997. — Т. 188, № 11. — С. 121—159.
18. *Харитонов, В. Л.* Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Харитонов // *Дифференц. уравнения*. — 1978. — Т. 14, № 11. — С. 2086—2088.
19. *Левин, А. Ю.* О состоятельном многомерном непараметрическом критерии однородности / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1993. — Т. 48, № 6. — С. 155—156.

В.Ш. Бурд

Краткая биографическая справка[1]

Левин Анатолий Юрьевич (07.04.1936 – 12.08.2007)

Анатолий Юрьевич Левин — многогранно одаренный математик, яркая личность и человек нелегкой профессиональной судьбы.

Он принадлежал к поколению людей, чье детство совпало с Великой Отечественной войной и тяжелыми годами послевоенной разрухи. Ленинградец по рождению, он находился со своей семьей в эвакуации в Саратовской области. Затем, по возвращении в родной город, получил среднее образование, закончив школу в 1953 году, и в том же году поступил в Воронежский государственный университет на специальность «математика».

Зарекомендовав себя талантливым, вдумчивым студентом, А. Ю. Левин по окончании университета был принят — не без сопротивления людей из руководства математико-механического факультета из-за его общественно-политической позиции — в аспирантуру на кафедру функционального анализа родного вуза и вступил на путь серьезных научных изысканий. Эта стезя оказалась для него далеко не простой, принесла ему немало житейских разочарований, но одновременно и позволила реализовать незаурядные способности в исследовательском и преподавательском труде. Научным руководителем Анатолия Юрьевича стал профессор Марк Александрович Красносельский, создавший многочисленную воронежскую математическую школу. Под его руководством Анатолий Юрьевич защитил в 1962 г. кандидатскую диссертацию. Еще раньше, в 1961 г., А. Ю. Левин начал работать в должности инженера на своем факультете, а став кандидатом наук, перешел с 1963 г. на преподавательскую ставку, сначала ассистента, затем недолго — старшего преподавателя, и с 1964 по 1966 г. — доцента кафедры функционального анализа. В декабре 1966 г. Анатолий Юрьевич становится старшим научным сотрудником Института автоматики и телемеханики (технической кибернетики) АН СССР, но, спустя менее двух лет, в 1968 г. возвращается на кафедру функционального анализа, на которой он проработал до 1971 г.

В 1970 году Анатолий Юрьевич защитил в Воронежском университете докторскую диссертацию, посвященную неосцилляции решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$. Диссертация представляла собой оригинальный и интересный научный труд, но не была утверждена ВАК по причинам, не имеющим отношения к математике.

С осени 1971 г. Анатолий Юрьевич начал преподавательскую деятельность в воссозданном незадолго перед тем Ярославском государственном университете. 25 августа 1971 г. он был принят на должность доцента и

[1]Использован архивный источник: Личные дела сотрудников университета, имеющих ученую степень или звание. Левин Анатолий Юрьевич // Государственный архив Ярославской области (ГАЯО). — Ф. Р-1010. — Оп. 2. — Д. 186. — Л. 1—79.

заведующего кафедрой теоретической кибернетики, на которой трудился более десяти лет. В 1986 году — в связи с организацией факультета информатики и вычислительной техники (ИВТ) и кафедры системного программирования на нем — был переведен на должность доцента этой кафедры. В 1989 году на факультете ИВТ была создана кафедра дискретного анализа, на которую Анатолий Юрьевич перешел работать, и в том же году в возрасте 53-х лет он был единогласно избран советом факультета на должность профессора. Список читавшихся им курсов выглядит внушительно: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дискретная математика», «Методы оптимизации», «Теория массового обслуживания», «Математические модели», «Математические методы в биологии». В июле 2003 г. Анатолий Юрьевич закончил преподавание в университете, выйдя на пенсию.

Как математик А. Ю. Левин занимался теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, он внес существенный вклад в изучение проблемы неосцилляции решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$, поставленной Дьёрдем Пойа в начале XX века. Широту научных интересов Анатолия Юрьевича характеризует тот факт, что еще одной областью исследований, в которой он добился значительных достижений, является минимизация выпуклых функций. А. Ю. Левин является автором известного алгоритма минимизации — метода центрированных сечений.

Среди учеников Анатолия Юрьевича немало тех, кто добился значимых результатов в науке и продолжил дело вузовского преподавания математических дисциплин. Можно назвать имена Ольги Федоровны Усковой, Вадима Сергеевича Рублева, Татьяны Енчевой, Глеба Дмитриевича Степанова, Юрия Викторовича Русина, Георгия Николаевича Копылова, Евгения Александровича Тимофеева.

Умер Анатолий Юрьевич Левин в августе 2007 г. в г. Зеленограде Московской области.

1. К вопросу о нулевой зоне устойчивости[2]

1. Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + q(t)x = 0. \tag{1}$$

Функция $q(t)$ для простоты предполагается непрерывной; с обычными оговорками все дальнейшее сохраняет силу для любой интегрируемой $q(t)$.

Нам понадобится следующее предложение, являющееся по существу оценкой снизу для расстояния между нулями нетривиальных решений уравнения (1). Здесь и в дальнейшем используется обозначение
$p_+(t) = \max\{0, p(t)\}$.

Теорема 1. *Если для некоторого a, $0 \leqslant a < \pi/\omega$, и некоторого натурального n выполняется неравенство*

$$\int\limits_t^{t+\omega/n} (q - a^2)_+ dt \leqslant 2a\frac{\cos(\omega a/n) - \cos(\pi/n)}{\sin(\omega a/n)} \tag{2}$$

при всех t из промежутка $0 \leqslant t \leqslant \omega(1 - 1/n)$, то каждое нетривиальное решение уравнения (1) *имеет не более одного нуля в промежутке* $[0, \omega]$.

При доказательстве этой теоремы используется, в частности, интегральный принцип сравнения [1]. Весьма полезным оказывается здесь также рассмотрение уравнений вида $\ddot{x} + p(t)x = 0$ с «обобщенным» коэффициентом $p(t)$, представляющим собой сумму непрерывной (или интегрируемой) функции и некоторого числа дельта-функций.

2. Перейдем теперь к вопросу об устойчивости решений уравнения (1). В дальнейшем предполагается, что $q(t)$ ω-периодична и удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\omega (qr^2 - \dot{r}^2)dt \geqslant 0, \tag{3}$$

где $r(t)$ — некоторая абсолютно непрерывная функция такая, что $|r(0)| = |r(\omega)|$; если $r(t)$ не меняет знака на $[0, \omega]$ и $\dot{r}(0) = \dot{r}(\omega)$, то дополнительно требуется, чтобы $r(t)$ не была решением уравнения (1). Условие (3) выполняется, в частности (при $r(t) \equiv 1$), если $q(t)$ ($\not\equiv 0$) неотрицательна в среднем.

С помощью теоремы 1 легко устанавливается следующее предложение.

---

[2]Левин А. Ю. К вопросу о нулевой зоне устойчивости // ДАН СССР. — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1221–1223. (Представлено академиком И. Г. Петровским 29 III 1962.)

Теорема 2. *Если для некоторого a, $0 \leqslant a \leqslant \pi/\omega$, и некоторого натурального n выполняется неравенство* (2) *при каждом t, $0 \leqslant t < \omega$, то все решения уравнения* (1) *вместе со своими производными ограничены на* $(-\infty, \infty)$.

Сформулированный критерий устойчивости тривиального решения соответствует нулевой зоне устойчивости по Ляпунову. Теорема 1 может быть очевидным образом использована также для получения критериев, соответствующих другим зонам устойчивости. Мы не останавливаемся на этом подробнее, поскольку основная трудность заключается именно в теореме 1.

3. В предельном случае $a = 0$ условие (2) приобретает вид

$$\int\limits_t^{t+\omega/n} q_+(t)dt \leqslant \frac{c_n}{\omega}, \quad c_n = 2n\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right). \tag{4}$$

Находим

$$c_1 = 4,\ c_2 = 4,\ c_3 = 3,\ c_4 = 8 - 4\sqrt{2},\ \ldots$$

При $n \to \infty$ константы c_n асимптотически убывают как π^2/n, так что в пределе условие (4) (как и общее условие (2)) переходит в известный критерий Н. Е. Жуковского [2] для нулевой зоны устойчивости: $q(t) \leqslant \pi^2/\omega^2$.

Совпадение c_1 и c_2 влечет за собой интересное следствие: оказывается, вместо классического условия А. М. Ляпунова [3] — М. Г. Крейна [4]

$$\int\limits_0^{\omega} q_+(t)dt \leqslant \frac{4}{\omega}$$

достаточно потребовать выполнения менее жесткого условия

$$\int\limits_t^{t+\omega/2} q_+(t)dt \leqslant \frac{4}{\omega} \quad (0 \leqslant t < \omega). \tag{5}$$

Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае: при $n = 1$ теорема 2 переходит в критерий устойчивости, содержащийся в работах В. А. Якубовича [5] и М. Г. Крейна [4]:

$$\int\limits_0^{\omega} (q - a^2)_+ dt \leqslant 2a \operatorname{ctg}\frac{\omega a}{2};$$

полагая, однако, $n = 2$, убеждаемся, что и в этом критерии интеграл по периоду может быть заменен интегралом по каждому полупериоду.

Таким образом, случай $n = 1$, когда теорема 2 переходит в известные результаты, оказывается подчиненным случаю $n = 2$; случаи же $n = 2, 3, 4, \ldots$ независимы.

При $n = 4$ теорема 2 усиливает результат Опяля [6], получившего следующий критерий устойчивости ($0 \leqslant a \leqslant \pi/\omega$):

$$\int\limits_t^{t+\omega/4} (q - a^2)_+ dt \leqslant \frac{\omega a}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\omega a}{4} \left(3 - \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega a}{4} + 5}\right) \quad (0 \leqslant t < \omega). \qquad (6)$$

Легко видеть, что для любого допустимого значения a правая часть неравенства (2) при $n = 4$ не менее чем в $4/3$ раза превосходит правую часть неравенства (6). В частности, для c_4 в [6] указывается значение $6 - 2\sqrt{5}$ вместо точного значения $8 - 4\sqrt{2}$. Утверждение Опяля о неулучшаемости приводимых им результатов является, таким образом, ошибочным.

4. Для тех случаев, когда проверка выполнения условия (2) или более частных условий того же типа затруднительна, полезно заметить, что в действительности проверки требуют лишь некоторые значения t из $[0, \omega)$. Если, например, нужно проверить выполнение условия (5) для некоторой неотрицательной дифференцируемой $q(t)$, то достаточно ограничиться теми t, при которых $q(t+\omega/2) = q(t)$, $\dot{q}(t+\omega/2) \leqslant \dot{q}(t)$. Действительно, нас интересуют только точки максимумов периодической функции $Q(t) = \int\limits_t^{t+\omega/2} q\, dt$, но $\dot{Q}(t) = q(t + \omega/2) - q(t)$. Можно, таким образом, ожидать, что в большинстве практически встречающихся случаев потребуется проверка лишь для одного или нескольких значений t.

В условиях теорем 1 и 2 фигурируют интегралы по отрезкам длины ω/n. Аналогичные предложения могут быть указаны для отрезков произвольной длины l (интерес представляет лишь случай $l \leqslant \omega/2$), однако формулировки при этом становятся более громоздкими.

5. В заключение приведем результат несколько иного характера. Определим константу k_0 ($k_0 \approx 7,85$) соотношениями

$$k_0 = \gamma^2 - \gamma \operatorname{tg} \gamma, \quad 2\gamma = \operatorname{tg} 2\gamma \ \left(\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi\right).$$

Теорема 3. *Если $p_+(t)$ непрерывна и монотонна на $[0, \omega]$ и*

$$\int\limits_0^{\omega} p_+(t) dt \leqslant \frac{k_0}{\omega}, \qquad (7)$$

то каждое нетривиальное решение уравнения $\ddot{x} + p(t)x = 0$ *имеет не более одного нуля в промежутке* $[0, \omega]$.

Это предложение доказывается с помощью интегрального принципа сравнения ([1], теорема 2). Как известно [2], аналогичное утверждение справедливо без предположения о монотонности $p_+(t)$, если в неравенстве (7) k_0 заменить константой 4.

Теорема 3 может быть очевидным образом переформулирована как оценка снизу первого положительного собственного числа краевой задачи

$$\ddot{x} + \lambda p(t)x = 0, \quad x(0) = x(\omega) = 0 \tag{8}$$

в случае монотонной $p_+(t)$. На этом пути могут быть установлены оценки и для других собственных чисел задачи (8), оказывающиеся полезными для получения критериев устойчивости решений уравнения (1) в случае периодической кусочно-монотонной $q(t)$.

6. Все приведенные результаты являются точными, т. е. не могут быть улучшены без дополнительных предположений.

Автор выражает глубокую признательность М. А. Красносельскому за внимание к работе.

Литература

1. *Левин, А. Ю.* Об одном принципе сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1960. — Т. 135, № 4. — С. 783—786.
2. *Жуковский, Н. Е.* Условия конечности интегралов уравнения $\dfrac{d^2y}{dx^2} + py = 0$ / Н. Е. Жуковский // *Матем. сб.* — 1892. — Т. 16, вып. 3. — С. 582—591.
3. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — Харьков: Изд. Харьковского матем. об-ва, 1892.
4. *Крейн, М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости / М. Г. Крейн // *ПММ*. — 1951. — Т. 15, вып. 3. — С. 323—348.
5. *Якубович, В. А.* Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$ / В. А. Якубович // *ДАН СССР*. — 1950. — Т. 74, № 5. — С. 901—903.
6. *Opial, Z.* Sur l'equation diférentielle $u'' + a(t)u = 0$ / Z. Opial // *Ann. Polon. Math.* — 1958. — Vol. 5, no. 2. — P. 77—93.

2. Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных[3]

1. Основной целью настоящей работы является доказательство следующего предложения.

Теорема 1. *Пусть n-кратно дифференцируемая функция $x(t)$ удовлетворяет условиям*

$$x(a_1) = x'(a_2) = \ldots = x^{(n-1)}(a_n) = 0 \qquad (a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b), \quad (1)$$

$$|x^{(n)}(t)| \leqslant \mu \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \quad (2)$$

Тогда имеет место неравенство

$$|x(t)| \leqslant \mu \frac{1}{n \left[\frac{n-1}{2}\right]! \left[\frac{n}{2}\right]!}(b-a)^n \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \quad (3)$$

Оценка (3) является неулучшаемой, так как достигается для соответствующих многочленов.

В дальнейшем этот результат используется для усиления известного критерия Валле-Пуссена [1] (см. также [2]) разрешимости многоточечной краевой задачи.

Для доказательства теоремы 1 исследуются крайние точки конечномерных функциональных множеств определенного типа. Такой подход представляется весьма естественным и может, по-видимому, быть использован для получения целого ряда аналогичных оценок.

Результаты настоящей статьи были ранее опубликованы без доказательства в заметке [3].

2. Приведем некоторые геометрические сведения, причем для простоты ограничимся конечномерным случаем. Пусть E — конечномерное нормированное пространство и $M \subset E$ — некоторое замкнутое выпуклое ограниченное множество. Точка $u \in M$ называется *промежуточной точкой множества* M, если она является внутренней точкой некоторого отрезка, принадлежащего M; точка $u \in M$, не являющаяся промежуточной точкой множества M, называется *крайней точкой множества* M. В силу известной теоремы М. Г. Крейна—Д. П. Мильмана (см. [4]), множество M

[3] Левин А. Ю. Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных // Математический сборник. — 1964. — Т. 64(106), № 3. — С. 396—409.

совпадает с выпуклой оболочкой своих крайних точек (для конечномерного случая может быть дано также прямое доказательство этого утверждения).

Пусть $M_1 \subset E$ — произвольное замкнутое ограниченное множество. Будем говорить, что множество $M_2 \subset M_1$ является *характеристическим подмножеством* множества M_1, если $\max\limits_{u \in M_1} F(u) = \max\limits_{u \in M_2} F(u)$ для любого выпуклого* функционала $F(u)$; для этого необходимо и достаточно, чтобы M_2 содержало все крайние точки $\overline{M}_1$ (через $\overline{M}$ обозначается выпуклое замыкание множества M).

Из теоремы М. Г. Крейна—Д. П. Мильмана как следствие вытекает следующее утверждение: для того чтобы M_2 было характеристическим подмножеством множества M_1, необходимо и достаточно, чтобы M_2 содержало все крайние точки множества $\overline{M}_1$. Таким образом, если разность $M_1 \setminus M_2$ содержит только промежуточные точки множества $\overline{M}_1$, то задача об отыскании максимума функционала $F(u)$ на множестве $\overline{M}_1$ сводится к задаче об отыскании максимума $F(u)$ на M_2.

3. Доказательство теоремы 1 будет состоять из нескольких этапов. Первые три леммы почти очевидны.

Лемма 1. *Пусть $x(t)$, $y(t) \in C^n[a,b]$ имеют в некоторой внутренней точке c отрезка $[a,b]$ нули кратности r и $r-1$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ соответственно. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что каждая из функций*

$$z_1(t) = x(t) - \varepsilon y(t), \quad z_2(t) = x(t) + \varepsilon y(t)$$

имеет не менее r нулей на отрезке $[a,b]$.

Доказательство элементарно, поэтому мы его опускаем.

Лемма 2. *Если $x(t) \in C^n[a,b]$ имеет на $[a,b]$ не менее $n+1$ нулей, то найдутся точки $t_1, t_2, \ldots, t_{2n+1}$, такие, что*

$$\begin{gathered} a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{2n} \leqslant t_{2n+1} \leqslant b, \\ x(t_1) = x'(t_2) = \ldots = x^{(n-1)}(t_n) = x^{(n)}(t_{n+1}) = \\ = x^{(n-1)}(t_{n+2}) = \ldots = x'(t_{2n}) = x(t_{2n+1}) = 0. \end{gathered}$$

Для доказательства достаточно провести обычное построение «пирамиды» нулей последовательных производных. В самом деле, пусть $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots$

*Непрерывный функционал $F(u)$ называется *выпуклым*, если для любых $u_1, u_2 \in E$ выполняется неравенство $F\left(\dfrac{u_1+u_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}[F(u_1)+F(u_2)]$; отсюда следует так называемое неравенство Иенсена (см. [5]) $F[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2] \leqslant \alpha F(u_1) + (1-\alpha)F(u_2)$ при любых $u_1, u_2 \in E$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

$\ldots, t_{n+1}^{(0)}$ — занумерованные в неубывающем порядке нули функции $x(t)$. По теореме Ролля найдутся n нулей функции $x'(t)$, которые мы обозначим через $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)}$ такие, что $t_i^{(0)} \leqslant t_i^{(1)} \leqslant t_{i+1}^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Продолжая этот процесс далее, находим два нуля $t_1^{(n-1)}$, $t_2^{(n-1)}$ функции $x^{(n-1)}(t)$ и, наконец, расположенный между ними нуль $t_1^{(n)}$ функции $x^{(n)}(t)$. Совокупность точек

$$t_1^{(0)}, t_1^{(1)}, \ldots, t_1^{(n-1)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n-1)}, \ldots, t_n^{(1)}, t_{n+1}^{(0)},$$

очевидно, удовлетворяет требованиям леммы.

Лемма 3. *Если $x(t)$ имеет в точке t_0 $(a \leqslant t_0 \leqslant b)$ нуль кратности не меньшей, чем n, и $|x^{(n)}(t)| \leqslant \mu$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, то $|x(t)| \leqslant \frac{\mu}{n!}|t-t_0|^n$ $(a \leqslant t \leqslant b)$.*

Эта оценка хорошо известна (см. [6]).

Нам понадобится еще следующее предложение.

Лемма 4. *Пусть N — конечномерная гиперплоскость банахова пространства E, состоящая из элементов вида $x = x_0 + y$, где $x_0 \in E$ — фиксированный элемент, а y пробегает некоторое конечномерное подпространство $E' \subset E$. Пусть, далее, $M \subset E$ — замкнутое множество, содержащее вместе с каждым элементом z все элементы вида λz. Если пересечение $E' \cap M$ состоит из одного нуля, то пересечение $N \cap M$ является замкнутым ограниченным множеством.*

Доказательство. Так как пересечение замкнутых множеств замкнуто, то осталось доказать лишь его ограниченность. Предположим противное: пусть последовательность элементов $x_i = x_0 + y_i$, $i = 1, 2, \ldots$, из $N \cap M$ такова, что $\| x_i \| \to \infty$ при $i \to \infty$. Рассмотрим нормированную последовательность

$$x_i^* = \frac{x_i}{\| x_i \|} = \frac{x_0}{\| x_i \|} + \frac{y_i}{\| x_i \|}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Последовательность $\{x_i^*\}$ принадлежит единичной сфере конечномерного пространства элементов вида $x = \lambda x_0 + y$ $(y \in E')$. В силу компактности, без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{x_i^*\}$ сходится к некоторому элементу y_0, $\| y_0 \| = 1$. Так как все x_i принадлежат M, то все x_i^* также принадлежат M; отсюда и из замкнутости M следует, что $y_0 \in M$. С другой стороны, если учесть, что $\dfrac{x_0}{\| x_i \|}$ стремится к нулю при возрастании i, то из (4) вытекает, что последовательность $\left\{ \dfrac{y_i}{\| x_i \|} \right\}$ элементов E' также сходится к y_0. Поэтому $y_0 \in E'$. Мы доказали, таким образом, что $y_0 \in E' \cap M$; так как $\| y_0 \| = 1$, то это противоречит исходному предположению о том, что $E' \cap M$ не содержит ненулевых элементов.

Лемма доказана.

4. Пусть $f(t)$ — произвольная непрерывная на $[a,b]$ функция. Через M_f обозначим множество функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям вида (1) и таких, что $x^{(n)}(t) = f(t)$. Другими словами, M_f — множество функций вида

$$x(t) = \int\limits_{a_1}^{t}\int\limits_{a_2}^{t_1}\dots\int\limits_{a_n}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\dots dt_1, \tag{5}$$

где совокупность $a_1, a_2, \dots, a_n$ пробегает n-мерную область

$$a \leqslant a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant b. \tag{6}$$

Если рассматривать M_f как множество элементов пространства $C^n[a,b]$ n-кратно непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с нормой

$$\| y \| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\ \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y^{(k)}(t)|,$$

то, в силу леммы 4, M_f является замкнутым ограниченным множеством. Действительно, M_f является пересечением n-мерной гиперплоскости N_f, состоящей из функций $x(t)$, таких что $x^{(n)}(t) = f(t)$ (роль E' здесь играет подпространство многочленов степени не выше $n-1$), и множества M функций из пространства $C^n[a,b]$, удовлетворяющих условиям вида (1). Все условия леммы 4 здесь выполнены: множество M замкнуто, из соотношения $z \in M$ вытекает соотношение $\lambda z \in M$, и ни один нетривиальный многочлен степени не выше $n-1$ не может удовлетворять условиям вида (1).

5. Будем говорить, что $x(t) \in M_f$ обладает системой параметров $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, если $x(t)$ удовлетворяет условиям (1) или, что то же самое, допускает запись в виде (5) (предполагается, что параметры $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют неравенствам (6)). Каждая функция из M_f обладает, таким образом, по крайней мере одной системой параметров. Пусть Ω_f — подмножество отрезка $[a,b]$, состоящее из точки b и всех нулей функции $f(t)$ на интервале (a,b). Через M_f^0 мы будем обозначать множество функций из M_f, обладающих системой параметров вида

$$(\underbrace{a, a, \dots, a}_{k},\ \underbrace{c, c, \dots, c}_{n-k}) \quad (c \in \Omega_f,\ 0 \leqslant k \leqslant n).$$

Следующее предложение является основным звеном доказательства.

Лемма 5. *Множество M_f^0 является характеристическим подмножеством множества M_f.*

Пусть $y(t)$ — произвольная функция из $M_f \setminus M_f^0$. В силу вышеизложенного, достаточно показать, что $y(t)$ является промежуточной точкой множества $\overline{M}_f$. Пусть $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — система параметров функции $y(t)$. Так как $y(t) \notin M_f^0$, то среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ есть отличные от a; пусть b_k — первое из них: $b_1 = \ldots = b_{k-1} = a$, $b_k > a$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Точка b_k является внутренней точкой отрезка $[a, b]$, ибо в случае $b_k = b$ имели бы $b_{k+1} = \ldots = b_n = b$, т. е. $y(t)$ обладала бы системой параметров $(\underbrace{a, \ldots, a}_{k-1}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k+1})$, что невозможно, так как $y(t) \notin M_f^0$. Далее, среди чисел $y^{(k)}(b_k), y^{(k+1)}(b_k), \ldots, y^{(n)}(b_k)$ есть отличные от нуля; в противном случае $y(t)$ обладала бы системой параметров $(\underbrace{a, \ldots, a}_{k-1}, \underbrace{b_k, \ldots, b_k}_{n-k+1})$, причем, так как $f(b_k) = y^{(n)}(b_k) = 0$, то $b_k \in \Omega_f$ и, следовательно, снова оказалось бы, что $y(t) \in M_f^0$.

Пусть $y^{(l)}(b_k)$ есть первое из этих чисел, т. е.

$$y^{(k-1)}(b_k) = \ldots = y^{(l-1)}(b_k) = 0, \tag{7}$$

$$y^{(l)}(b_k) \neq 0 \quad (k \leqslant l \leqslant n). \tag{8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_l$ совпадают с b_k (в противном случае нужно переобозначение). Для удобства записи положим $b_{n+1} = b$. Из (8) вытекает, что

$$a < b_k < b_{l+1}. \tag{9}$$

Пусть

$$P(t) = \underbrace{\int_a^t \ldots \int_a^{t_{k-2}}}_{k-1} \underbrace{\int_{b_k}^{t_{k-1}} \ldots \int_{b_k}^{t_{l-2}}}_{l-k} dt_{l-1} dt_{l-2} \ldots dt_1.$$

Ясно, что $P(t)$ — многочлен $(l-1)$-й степени, удовлетворяющий условиям

$$P^{(i-1)}(b_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, l+2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$P^{(l-1)}(t) \equiv 1.$$

Так как $P^{(k-1)}(t)$ имеет в точке b_k нуль кратности $l-k$, а $y^{(n-1)}(t)$ — нуль кратности $l-k+1$ и обе эти функции $(n-k+1)$-кратно непрерывно дифференцируемы, то, в силу леммы 1, найдется такое $\varepsilon > 0$, что каждая из функций

$$u_1(t) = y^{(k-1)}(t) + \varepsilon P^{(k-1)}(t), \quad u_2(t) = y^{(k-1)}(t) - \varepsilon P^{(k-1)}(t)$$

имеет на $[a, b_{l+1}]$ не менее $l-k+1$ нулей. Отсюда, воспользовавшись леммой 2, заключаем, что в $[a, b_{l+1}]$ найдутся точки

$$(a \leqslant) b_k^{(j)} \leqslant b_{k+1}^{(j)} \leqslant \ldots \leqslant b_l^{(j)} (\leqslant b_{l+1}), \quad j = 1, 2, \tag{11}$$

такие, что

$$u_j(b_k^{(j)}) = u_j'(b_{k+1}^{(j)}) = \ldots = u_j^{(l-k)}(b_l^{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{12}$$

Если положить $z_1(t) = y(t) + \varepsilon P(t)$, $z_2(t) = y(t) - \varepsilon P(t)$, то условие (12) перепишется в виде

$$z_j^{(i-1)}(b_i^{(j)}) = 0, \quad i = k, k+1, \ldots, l; \quad j = 1, 2. \tag{13}$$

С другой стороны, из (10) следует, что

$$z_j^{(i-1)}(b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, l+1, l+2, \ldots, n; \quad j = 1, 2. \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) показывают, что каждая из функций $z_j(t)$, $j = 1, 2$, обладает соответственно системой параметров $(\underbrace{a, \ldots, a}_{k-1}, b_k^{(j)}, b_{k+1}^{(j)}, \ldots, b_l^{(j)}, b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_n)$. Монотонность расположения параметров обеспечивается неравенствами (9), (11). Так как $z_j^{(n)}(t) = y^{(n)}(t) = f(t)$ $(j = 1, 2)$, то функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ принадлежат множеству M_f. Очевидно, далее, что обе эти функции отличны от $y(t)$. Воспользовавшись соотношением $y(t) = \dfrac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t))$, заключаем, что $y(t)$ есть внутренняя точка отрезка, концы которого принадлежат M_f, и, следовательно, является промежуточной точкой множества $\overline{M}_f$.

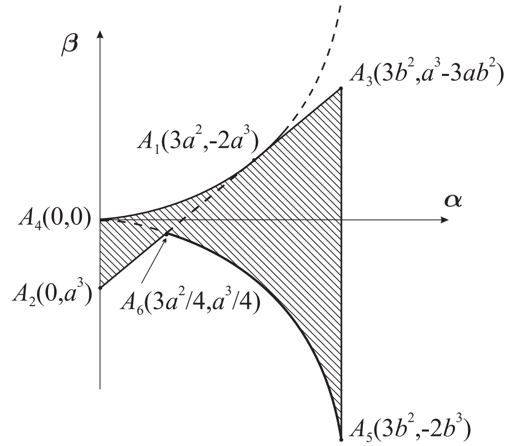
Лемма доказана.

Из леммы 5 следует, между прочим, что если $f(t)$ имеет не более q нулей на интервале (a, b), то число крайних точек множества $\overline{M}_f$ не превосходит $1 + n(q+1)$. Множество $\overline{M}_f$ является, следовательно, r-гранником, причем $r \leqslant 1 + n(q+1)$.

Пример. Пусть $n = 2$, $f(t) = -6t$. Относительно отрезка $[a, b]$ предположим, что $a < 0, a + b > 0$. Множество Ω_f состоит в этом случае из двух точек: $t = 0$ и $t = b$. Множество M_f^0 состоит, таким образом, из пяти функций, обладающих соответственно системами параметров (a, a), $(a, 0)$, (a, b), $(0, 0)$, (b, b) (фактически могло бы оказаться, что несколько из этих систем параметров соответствуют одной функции; в нашем случае этого нет).

Множество M_f для рассматриваемого случая изображено на рисунке.

Заштрихованная фигура линейно изоморфна M_f: каждой ее точке (α, β) взаимно однозначно соответствует функция $x(t) = -t^3 + \alpha t + \beta$ из множества M_f.



Точки A_2, A_6, A_1, A_3 лежат на прямой $a\alpha + \beta = a^3$, точки A_3, A_5 — на прямой $\alpha = 3b^2$. Криволинейные куски границы A_1A_4 и A_5A_6 являются частями полукубической параболы $\beta = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\alpha^{3/2}$. Характерна «вогнутость» (для $n \geqslant 3$ — «невыпуклость») криволинейной части границы, означающая,что $\overline{M}_f$ — многоугольник (для $n \geqslant 3$ — многогранник).

Функциям с системами параметров (a, a), $(a, 0)$, (a, b), $(0, 0)$, (b, b) отвечают соответственно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Очевидно, что множеству $\overline{M}_f$ соответствует трапеция $A_2A_4A_3A_5$. Таким образом, множество $\overline{M}_f$ имеет в нашем случае четыре крайних точки, которым соответствуют функции с системами параметров $(a, 0)$, (a, b), $(0, 0)$, (b, b). Характеристическое подмножество M_f^0 множества M_f, о котором идет речь в лемме 5, оказалось здесь «завышенным» на одну точку по сравнению с минимальным характеристическим подмножеством — совокупностью всех крайних точек множества $\overline{M}_f$ (это объясняется тем, что соответствующая точке A_1 функция, кроме системы параметров (a, a), имеет также систему параметров $(a, -a)$).

6. Перейдем, наконец, непосредственно к доказательству теоремы 1. Учитывая однородность по μ, можно ограничиться случаем $\mu = 1$. Докажем теорему для отрезка $[0, 1]$ (произвольный отрезок $[a, b]$ приводится к отрезку $[0, 1]$ очевидной заменой переменной $t = a + (b - a)t_1$).

Для доказательства теоремы нужно показать, что для любой непрерывной функции $f(t)$, такой, что

$$|f(t)| \leqslant 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{15}$$

справедливо неравенство

$$\max_{x \in M_f} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \leqslant \frac{1}{n\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!}.$$

Поскольку функционал $F(x) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$ является выпуклым, то, в силу леммы 5, достаточно доказать, что для любой функции $x(t) \in M_f^0$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)| \leqslant \frac{1}{n\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!}. \tag{16}$$

Итак, пусть $x(t) \in M_f^0$. Это значит, что $x(t)$ обладает системой параметров вида $(\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\ \underbrace{c,\ldots,c}_{n-k})$ $(0 \leqslant k \leqslant n, 0 \leqslant c \leqslant 1)$ (условие $c \in \Omega_f$ нам не понадобится). Можно считать, что $1 \leqslant k \leqslant n-1$, так как в случае $k = 0$ или $k = n$ с помощью леммы 3 получаем $|x(t)| \leqslant \dfrac{1}{n!}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и нам остается сослаться на неравенство

$$\frac{1}{n\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!} = \frac{(n-1)!}{n!\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!} = \frac{C_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!} \geqslant \frac{1}{n!}. \tag{17}$$

При $k \geqslant 1$ применима известная формула Коши:

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^{t_{k-1}}}_{k} x^{(k)}(t_k)dt_k\ldots dt_1 = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-s)^{k-1}x^{(k)}(s)ds. \tag{18}$$

Функция $x^{(k)}(t)$ имеет в точке c нуль кратности не меньше $n-k$. В силу (15), $(n-k)$-я производная этой функции не превосходит по абсолютной величине единицы; поэтому на основании леммы 3

$$|x^{(k)}(t)| \leqslant \frac{1}{(n-k)!}|t-c|^{n-k} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{19}$$

Соотношения (18), (19) дают

$$|x(t)| \leqslant X_k(t,c) = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^t (t-s)^{k-1}|c-s|^{n-k}ds \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Ввиду положительности направления интегрирования мажоранта $X_k(t,c)$ при любом k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ обладает следующими свойствами:

а) $X_k(t,c)$ является неубывающей функцией от t, так как подынтегральная функция неотрицательна и не убывает по t;

б) $X_k(t,c)$ является выпуклой функцией от c, так как подынтегральная функция выпукла по c.

Отсюда следует, что максимум $X_k(t,c)$ в квадрате $0 \leqslant t, c \leqslant 1$ равен наибольшему из чисел $X_k(1,0)$, $X_k(1,1)$. Находим

$$X_k(1,0) = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\int\limits_0^1 (1-s)^{k-1}s^{n-k}ds = \frac{1}{n!},$$

$$X_k(1,1) = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\int\limits_0^1 (1-s)^{n-1}ds = \frac{1}{n(k-1)!(n-k)!} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{n!}.$$

Так как $C_{n-1}^{k-1} \geqslant 1$, то $\max X_k(t,c) = X_k(1,1) = \dfrac{1}{n!}C_{n-1}^{k-1}$ $(0 \leqslant t, c \leqslant 1)$. Выберем оптимальное значение k. Так как наибольший из биномиальных коэффициентов $C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, C_{n-1}^2, \dots C_{n-1}^{n-2}, C_{n-1}^{n-1}$ находится, как известно, в середине этого ряда и равен $C_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, то получаем:

$$X_k(t,c) \leqslant \frac{1}{n!}C_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \frac{1}{n\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1;\ 0 \leqslant t, c \leqslant 1).$$

Неравенство (16), а вместе с ним и теорема 1, доказаны.

7. Полученная оценка является точной, так как достигается для соответствующих многочленов. Это видно из доказательства теоремы. Можно показать это и другим путем. Многочлен

$$P_k(t) = t^n - C_n^1 t^{n-1} + C_n^2 t^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-k}C_n^{n-k}t^k,$$

получающийся «усечением» многочлена $Q(t) = (t-1)^n$, удовлетворяет условиям $P_k(0) = \ldots = P_k^{(k-1)}(0) = 0$, $P_k^{(k)}(1) = \ldots = P_k^{(n-1)}(1) = 0$. Выполнение первого условия очевидно; второе же вытекает из того факта, что разность $Q(t) - P_k(t)$ есть многочлен $(k-1)$-й степени и, следовательно, у $P_k(t)$ и $Q(t)$ совпадают производные всех порядков, начиная с k-го.

Воспользовавшись известным соотношением

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-k}C_n^{n-k} = (-1)^{n-k}C_{n-1}^{n-k},$$

находим, что $|P_k(1)| = C_{n-1}^{n-k}$. Так как $P_k^{(n)}(t) \equiv n!$, то для многочлена $P_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(t)$ в оценке (3) действительно имеет место знак равенства.

8. Остановимся еще на двух замечаниях по поводу формулировки теоремы 1, первое из которых понадобится нам в дальнейшем.

Замечание 1. *Оценка* (3) *остается справедливой, если вместо неубывания чисел* $a_1, a_2 \dots, a_n$ *потребовать невозрастание этих чисел. В этом легко убедиться с помощью замены переменной* $t = a + b - t_1$.

Замечание 2. *Параметр a_1 можно не включать в условие монотонности и требовать, таким образом, только выполнения одного из неравенств $a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ или $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Подробнее мы здесь на этом не останавливаемся.*

9. С. Н. Бернштейну (см. [7]) принадлежит оценка, аналогичная оценке (3), но без предположения о монотонном расположении точек $a_1, a_2 \ldots, a_n$.

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Если функция $x(t)$, удовлетворяющая условию (2), и все ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно имеют нули на отрезке $[a, b]$, то справедливо неравенство*

$$|x(t)| \leqslant \mu C_n'(b-a)^n \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где константы C_n' определяются из разложения

$$\operatorname{tg} t + \sec t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n' t^n \quad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Значения констант C_n' неулучшаемы. Отметим, что, в отличие от теоремы 1, доказательство теоремы С. Н. Бернштейна не требует исследования крайних точек, так как в этом случае приводит к цели обычный способ «возмущений». Дополнительное предположение о монотонности нулей лишает эффективности этот естественный прием доказательства, тем самым существенно усложняя задачу.

Использованные выше геометрические соображения и, в частности, лемма 5 могут быть применены для получения ряда аналогичных оценок, связанных с выпуклыми функционалами (оценка значения функции $x(t)$ в заданной точке, оценка нормы $x(t)$ в $L^p[a, b]$ и т. д.).

10. Теорема С. Н. Бернштейна и теорема 1 непосредственно связаны с вопросами интерполяции последовательными производными (интерполяции Гончарова; см. [8]). Эта интерполяция заключается в следующем: функция $y(t)$ (достаточно гладкая) аппроксимируется многочленом $P(t)$ $(n-1)$-й степени, таким, что $P(a_1) = y(a_1)$, $P'(a_2) = y(a_2), \ldots, P^{(n-1)}(a_n) = y^{(n-1)}(a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — узлы интерполяции. Так как $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются нулями соответствующих последовательных производных разности $P(t) - y(t)$, то теорема С. Н. Бернштейна дает оценку (через длину этого промежутка и $\max |y^{(n)}(t)|$) абсолютной величины погрешности на промежутке интерполяции, а теорема 1 — аналогичную оценку для случая монотонного расположения узлов.

В приводимой ниже таблице даны для сравнения константы $C_n = \dfrac{1}{n\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!}$ из теоремы 1 и C'_n из теоремы С. Н. Бернштейна.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
C'_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{61}{720}$	$\frac{17}{315}$	$\frac{277}{8064}$
C_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{1052}$

Совпадение C_n и C'_n при $n \leqslant 3$ становится понятным, если учесть вышеприведенные замечания. Для $n = 3$, например, при любом расположении узлов выполняется одно из неравенств $a_2 \leqslant a_3$, $a_2 \geqslant a_3$. При $n > 3$ имеет место неравенство $C_n < C'_n$, т. е. теорема 1 дает лучшие значения констант, чем теорема С. Н. Бернштейна. Это тоже понятно, поскольку обе оценки являются точными, а теорема С. Н. Бернштейна накладывает меньше ограничений на оцениваемую функцию. Любопытно, однако, что константы C_n и C'_n имеют также существенно различные асимптотики: константы C'_n убывают как геометрическая прогрессия со знаменателем $\dfrac{2}{\pi}$, а константы C_n, очевидно, стремятся к нулю быстрее любой геометрической прогрессии $\left(\text{ниже будет дано асимптотическое выражение для } \dfrac{C_n}{2^n}\right)$. Это различие в асимптотике, возможно, представляет интерес для теории интерполяции Гончарова.

11. Остановимся на применении полученной оценки, связанном с многоточечной краевой задачей. Задача, о которой идет речь, заключается в отыскании для уравнения

$$L(x) \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{20}$$

(функции $p_1(t), \ldots, p_n(t)$, $f(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$) решения $x(t)$, удовлетворяющего условиям $x(a_1) = A_1$, $x(a_2) = A_2, \ldots,$ $x(a_n) = A_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные точки отрезка $[a, b]$. Мы будем рассматривать несколько более общие краевые условия

$$\begin{gathered} x(a_i) = A_{i,1},\ x'(a_i) = A_{i,2},\ \ldots,\ x^{(r_i-1)}(a_i) = A_{i,r_i}, \\ i = 1, 2, \ldots, m,\ (2 \leqslant m \leqslant n,\ r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n). \end{gathered} \tag{21}$$

Говорят, что отрезок $[a, b]$ является *промежутком неосцилляции для оператора* L, если каждое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет на $[a, b]$ не более $n - 1$ нулей (нули считаются в соответствии с их кратностью). Как легко видеть (см. [2]), задача (20)—(21) разрешима при любых $A_{i,k}$, любых $a_1, a_2, \ldots, a_m$ из $[a, b]$ и любой непрерывной функции $f(t)$ в том и только том случае, когда $[a, b]$ является промежутком неосцилляции для L; при этом имеет место также единственность решения. Помимо разрешимости многоточечной краевой задачи, вопрос о неосцилляции имеет существенное значение для характеристики различных свойств оператора L (представление оператора L в виде произведения n дифференциальных операторов первого порядка, теоремы о дифференциальных неравенствах, интерполяционные вопросы и др.). Значительный интерес представляют поэтому эффективные критерии неосцилляции. Первый критерий такого рода был получен Валле-Пуссеном; он может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 3 (Валле-Пуссен [1] (см. также [2])). *Пусть*

$$|p_i(t)| \leqslant L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{22}$$

Если выполнено неравенство $P(b-a) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{L_k}{k!}(b-a)^k \leqslant 1$, *то отрезок* $[a, b]$ *является промежутком неосцилляции для оператора*

$$L(x) \equiv x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \ldots + p_n x.$$

12. Докажем следующее предложение.

Теорема 4. *Пусть выполнены соотношения* (22). *Если имеет место неравенство*

$$P_1(b-a) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{2^k k \left[\frac{k-1}{2}\right]! \left[\frac{k}{2}\right]!}(b-a)^k \leqslant 1, \tag{23}$$

то отрезок $[a, b]$ *является промежутком неосцилляции для оператора* $Lx \equiv x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \ldots + p_n x$.

Доказательство. Предположим противное: пусть справедливо неравенство (23) и в то же время некоторое нетривиальное решение $x(t)$ уравнения $Lx = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ не менее n нулей. В силу леммы 2, на $[a, b]$ найдется точка τ, такая, что функция $x(t)$ обладает неубывающей системой параметров на $[a, \tau]$ и невозрастающей системой параметров на $[\tau, b]$. Как отмечалось выше, для оценки (3) существенна лишь монотонность параметров; поэтому оба эти отрезка равноправны. Выберем из них тот, длина которого не превосходит $\dfrac{b-a}{2}$ (простой, но весьма существенный момент, объясняющий смысл перехода от нулей функции к нулям ее последовательных производных). Пусть, например, это будет отрезок $[a,\tau]$. Очевидно, $a\neq\tau$, так как в противном случае $x(t)$ имела бы в точке a нуль, кратность которого не меньше n, что невозможно. Пусть

$$\max_{a\leqslant t\leqslant\tau}|x^{(n)}(t)|=|x^{(n)}(t_0)|=\mu\quad(a\leqslant t_0\leqslant\tau),$$

причем в случае $x^{(n)}(t)\equiv\mathrm{const}$ в качестве t_0 выберем какую-либо внутреннюю точку отрезка $[a,\tau]$, например, точку $\dfrac{a+\tau}{2}$. Очевидно, $\mu>0$, так как иначе функция $x(t)$ должна была бы совпадать на $[a,\tau]$ с некоторым многочленом степени $m\leqslant n-1$ и, следовательно, производная $x^{(m)}(t)$ не имела бы нулей на $[a,\tau]$.

Используя уравнение $Lx=0$ и оценки (22), получаем:

$$\mu=|x^{(n)}(t_0)|=|p_1(t_0)x^{(n-1)}(t_0)+\dots+p_n(t_0)x(t_0)|\leqslant \\ \leqslant\sum_{k=1}^{n}L_k|x^{(n-k)}(t_0)|. \quad (24)$$

Каждая из функций $x^{(n-k)}(t)$, $k=1,2,\dots,n$, удовлетворяет условиям теоремы 1, если в этих условиях заменить n и b на k и τ. Поэтому

$$|x^{(n-k)}(t_0)|\leqslant\mu\frac{(\tau-a)^k}{k\left[\frac{k-1}{2}\right]!\left[\frac{k}{2}\right]!}\leqslant\mu\frac{(b-a)^k}{2^kk\left[\frac{k-1}{2}\right]!\left[\frac{k}{2}\right]!} \quad (25)$$

$$(k=1,2,\dots,n).$$

Подставляя неравенства (25) в (24), находим:

$$P_1(b-a)\geqslant 1. \quad (26)$$

Для того чтобы получить противоречие с неравенством (23), достаточно доказать, что в действительности в формуле (26) должен стоять знак $>$. Среди чисел $L_1,L_2,\dots,L_n$ есть числа, отличные от нуля, поскольку, как уже отмечалось, $x(t)$ не может быть многочленом, степень которого ниже n. Поэтому, для того чтобы формула (26) выполнялась со знаком равенства, необходимо, чтобы формулы (25) выполнялись со знаком равенства хотя бы при одном значении k $(1\leqslant k\leqslant n)$. Но из доказательства теоремы 1 нетрудно усмотреть, что в (3) знак равенства может иметь место только при выполнении следующих условий (предполагается, что $\mu>0$):

1) $x(t)$ является многочленом n-й степени;

2) t совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$.

Наложенное выше ограничение на выбор t_0 позволяет утверждать, что в нашем случае оба таких условия одновременно выполняться не могут.

Теорема доказана.

13. В приводимой ниже таблице даны для сравнения множители $B_k = \frac{C_k}{2^k}$ коэффициентов многочлена $P_1(h)$ и соответствующие множители $B'_k = \frac{1}{k!}$ коэффициентов многочлена $P(h)$ из теоремы Валле-Пуссена.

k	1	2	3	4	5	6
B'_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$
B_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{640}$	$\frac{1}{4608}$

Теорема 4, таким образом, действительно является усилением теоремы Валле-Пуссена, поскольку коэффициенты многочлена $P_1(h)$ меньше соответствующих коэффициентов многочлена $P(h)$ (см. [3]). При этом значение коэффициента при первой степени h улучшается в два раза, а значения остальных коэффициентов — не менее чем в четыре раза.

Исследуем еще асимптотику чисел B_n. Если n — четное ($n = 2m$), то

$$\frac{1}{B_n} = 2^n n \left[\frac{n-1}{2}\right]! \left[\frac{n}{2}\right]! = 2^{2m} 2m(m-1)!m! = 2^{2m+1}(m!)^2 \sim$$

$$\sim 2^{2m+1}\left(\frac{m}{e}\right)^{2m} 2\pi m \left(1 + \frac{1}{6m}\right) = \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m} 4\pi m \left(1 + \frac{1}{6m}\right) = \tag{27}$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n 2\pi n \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \sim n!\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{4n}\right).$$

Знак $\sim$ означает здесь и в дальнейшем, что относительная погрешность имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Для нечетного n ($n = 2m+1$) аналогично находим:

$$\frac{1}{B_n} = 2^{2m+1}(2m+1)(m!)^2 \sim 2^{2m+1}(2m+1)\left(\frac{m}{e}\right)^{2m} 2\pi m\left(1+\frac{1}{6m}\right) =$$

$$= (2m+1)\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m} 4\pi m\left(1+\frac{1}{6m}\right) \sim$$

$$\sim n(n-1)!\sqrt{2\pi(n-1)}\left(1+\frac{1}{4n}\right) \sim n!\sqrt{2\pi n}\left(1-\frac{1}{4n}\right). \quad (28)$$

Соотношения (27), (28) могут быть объединены следующим образом:

$$B_n \sim \frac{1}{n!\sqrt{2\pi n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{4n}\right]. \quad (29)$$

Формула (29) справедлива не только асимптотически, но дает также хорошее приближение величин B_n при любом натуральном n (при этом относительная погрешность не превосходит $1,3\%$). Эта формула показывает, в частности, что отношение $\dfrac{B'_n}{B_n}$ соответствующих коэффициентов многочленов $P(h)$ и $P_1(h)$ асимптотически ведет себя как $\sqrt{2\pi n}$ и, следовательно, при возрастании n стремится к бесконечности.

14. В работе [9], исходя из другой оценки для дифференцируемых функций, было получено следующее условие неосцилляции:

$$P_2(b-a) \equiv \sum_{k=1}^{n} B_{k,n} L_k (b-a)^k < 1.$$

Здесь положено

$$B_{k,n} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1; \quad B_{n,n} = \frac{1}{n!}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Сформулированный критерий, очевидно, также является усилением теоремы Валле-Пуссена; сравнивая его с теоремой 4, легко убедиться, что оба эти предложения являются взаимно независимыми.

Вопросы неосцилляции в различных планах изучались также в работах [10–14], [15].

В заключение автор выражает благодарность М. А. Красносельскому за внимание к работе.

Литература

1. *de la Vallée Poussin, C.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension

aux équations d'ordre n / C. de la Vallée Poussin // *J. Math. Pures et Appl. (9)*. — 1929. — Vol. 8. — P. 125—144.

2. *Сансоне, Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Д. Сансоне. — М.: ИЛ, 1953. — Т. 1. — 346 с.
3. *Левин, А. Ю.* О некоторых оценках дифференцируемой функции / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1961. — Т. 138, № 1. — С. 37—38.
4. *Крейн, М. Г.* On extreme points of regularly convex sets / М. Г. Крейн, Д. П. Мильман // *Studia math.* — 1940. — Vol. 9. — P. 133—138.
5. *Красносельский, М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. — М.: Гостехиздат, 1958. — 270 с.
6. *Гельфонд, А. О.* Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952. — 480 с.
7. *Бернштейн, С. Н.* О некоторых свойствах циклически монотонных функций / С. Н. Бернштейн // *Изв. АН СССР, серия матем.* — 1950. — Т. 14. — С. 381—404.
8. *Евграфов, М. А.* Интерполяционная задача Абеля—Гончарова / М. А. Евграфов. — М.; Л.: Гостехиздат, 1954. — 126 с.
9. *Бессмертных, Г. А.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г. А. Бессмертных, А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 471—474.
10. *Азбелев, Н. В.* К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка / Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк // *Матем. сб.* — 1960. — Т. 51(93), № 4. — С. 475—486.
11. *Чичкин, Е. С.* Об одной неосцилляционной теореме для линейного самосопряженного дифференциального уравнения четвертого порядка / Е. С. Чичкин // *Изв. ВУЗов*. — 1960. — Т. 4. — С. 206—209.
12. *Aramă, O.* Cercetări asupra distribuţiei rădămacinilor reale ale integralelor ecua ţiilor diferenţiale, in legătură cu unele probleme polilocale / O. Aramă // *Studii şi cercet. de mat. (Cluj)*. — 1960. — Vol. 11, no. 2. — P. 241—259.
13. *Lasota, A.* Sur un problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n / A. Lasota, Z. Opial // *Bull. Acad. polon sci., Sér. sci. math., astron. et phys.* — 1961. — Vol. 9, no. 9. — P. 667—671.
14. *Кондратьев, В. А.* О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ / В. А. Кондратьев // *Труды Моск. матем. о-ва*. — 1961. — № 10. — С. 419—436.
15. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512—515.

3. Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения [4]

1. Сформулируем вначале результат, относящийся к уравнению Фредгольма

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,d\mu(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1}$$

Здесь $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации: $V_a^b \mu(t) \leqslant C_1$ (до п. 6 все функции предполагаются комплекснозначными), а $K(t,s)$ измерима и почти при любом s на $[a,b]$ удовлетворяет условиям

$$|K(t,s)| \leqslant C_2, \quad V_a^b K^{(m)}(t,s) \leqslant C_3 \tag{2}$$

($m > 0$; дифференцирование и вариация здесь и в дальнейшем — по первому аргументу). Второе из неравенств (2) понимается в том смысле, что $K^{(m)}(t,s)$ почти всюду на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$ совпадает с функцией, вариация которой на этом промежутке $\leqslant C_3$. Непрерывность $K^{(m)}(t,s)$ не требуется, предполагается лишь, что $K^{(m-1)}(t,s)$ абсолютно непрерывна по t почти при всех s.

Теорема 1. *При допущенных предположениях числитель $D(t,s,\lambda)$ (почти при всех s) и знаменатель $D(\lambda)$ резольвенты Фредгольма для* (1) *являются целыми функциями λ порядка не выше $\dfrac{1}{m+1}$, так что, в частности,*

$$D(\lambda) = \prod_i \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right), \tag{3}$$

где $\lambda_i (0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \dots)$ — собственные значения (с.з.) уравнения (1), *занумерованные с учетом кратности. Кроме того, все с.з. удовлетворяют неравенству*

$$|\lambda_k| \geqslant C k^{m+1}, \quad C = C(C_1, C_2, C_3, m, b-a) > 0. \tag{4}$$

Разумеется, (4) содержательно лишь в случае существования с.з. Для C может быть указано явное выражение через $C_1, C_2, C_3, m, b-a$. При доказательстве теоремы 1 используются некоторые приемы, изложенные в [1], в сочетании с известными результатами о скорости убывания коэффициентов Фурье гладких функций.

[4] Левин А. Ю. Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159, № 1. — С. 13—16. (Представлено академиком И. Г. Петровским 15 V 1964.)

2. Рассмотрим общую несингулярную краевую задачу для уравнения n-го порядка:

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{5}$$

$$l_i[x] \equiv \sum_{k=0}^{n-2} a_{ik}x^{(k)}(a) + \int_a^b x^{(n-1)}(t)\,dg_i(t) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Здесь $p_1(t), \ldots, p_n(t), f(t)$ суммируемы на $[a, b]$; $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ имеют ограниченную вариацию и непрерывны справа внутри (a, b); a_{ik} и β_i — комплекснозначные постоянные. Функционалы $l_i[x]$ записаны в «приведенном» виде, который является удобным и в то же время общим, так как $x^{(k)}(t)$ $k = 0, 1, \ldots, n-2$ линейно выражаются через $x^{(k)}(a)$ и $x^{(n-1)}(t)$. Линейно комбинируя l_i можно также упростить матрицу $||a_{ik}||$.

Если соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений, то, как известно, существует функция Грина $G(t, s)$, определенная в квадрате K: $a \leqslant t, s \leqslant b$ и позволяющая записать решение (5) – (6) в виде

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i(t),$$

где $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений $Ly = 0$ такая, что $l_i[y_j] = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $Y(t, s)$ как функция t есть решение $Ly = 0$ такое, что при $t = s$ $Y^{(i)}(t, s) = \delta_{i,n-1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть, далее, $H(t, s)$ — функция Коши для L, т.е. $H(t, s) = 0$ при $t \leqslant s$, $H(t, s) = Y(t, s)$ при $t > s$. Удобной является формула

$$G(t, s) = H(t, s) - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) l_i[H(t, s)] = \\ = H(t, s) - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \int_s^b Y^{(n-1)}(t, s)\,dg_i(t). \tag{7}$$

Она позволяет, в частности, исследовать свойства $G(t, s)$ как функции s. Легко видеть, например, что

$$G(t, s_0 + 0) - G(t, s_0 - 0) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)[g_i(s_0 + 0) - g_i(s_0 - 0)] \quad (a < s_0 < b)$$

при $n = 1$, $t = s_0$ из правой части следует вычесть 1. Следовательно, $G(t, s)$ непрерывна по s на прямой $s = s_0$ $(a < s_0 < b,\ n > 1)$ тогда и только тогда, когда все $g_i(t)$ непрерывны в точке $t = s_0$. Так как $G(t, a)$, $G(t, b)$ можно доопределить по непрерывности, то *задача* (5) – (6) *при* $n > 1$ *обладает непрерывной в* K *функцией Грина в том и только том случае,* *если* $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ *непрерывны внутри* (a, b). При некоторых требованиях на гладкость $p_i(t)$ можно охарактеризовать и *гладкость* $G(t,s)$ *по* s, которая, как оказывается, также *определяется гладкостью* $g_i(t)$. Для дальнейшего, однако, существенна не зависящая от краевых условий гладкость $G(t,s)$ по t, характеризующаяся тем, что вариация $G^{(n-1)}(t,s)$ на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$ ограничена равномерно по s.

Лемма 1. *При всех* s, $a \leqslant s \leqslant b$, *справедливо неравенство*

$$\int_a^b |Y^{(n)}(t,s)|\, dt \leqslant \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \int_a^b |p_k(t)|\, dt \right\}.$$

Отсюда следует, что $|Y^{(n-1)}(t,s)| \leqslant \gamma$, что в сочетании с (7) дает равномерную по s оценку для $V_a^b G^{(n-1)}(t,s)$. Попутно получаем также оценку $|Y(t,s)| \leqslant \dfrac{\gamma}{(n-1)!}|t-s|^{n-1}$.

3. Рассмотрим теперь задачу

$$Lx = \lambda q(t) x, \quad l_i[x] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $q(t)$ суммируема на $[a, b]$. Эта задача эквивалентна уравнению

$$x(t) = \lambda \int_a^b G(t,s) q(s) x(s)\, ds. \tag{9}$$

которое, в силу сказанного, при $n > 1$ удовлетворяет условиям теоремы 1 для $m = n-1$, $d\mu(t) = q(t)dt$. Поэтому $D(t,s,\lambda)$, $D(\lambda)$ *являются функциями порядка не выше* $1/n$ *(это верно и при* $n = 1$*), при* $n > 1$ *имеет место разложение* (3) *и все с.з.* λ_k *удовлетворяют неравенству* $|\lambda_k| \geqslant Ck^n$ ($C > 0$). Если фундаментальная система для $Ly = 0$ известна, то C может быть указано эффективно. Отметим, что использование теоремы 1 из [1] привело бы здесь к существенно менее точным результатам. Приравнивая в разложении (3) для (9) коэффициенты при λ, получаем **формулу следов** (для $n > 1$)

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \int_a^b G(t,t) q(t)\, dt. \tag{10}$$

4. Дальнейшее связано с задачами Штурма—Лиувилля следующего вида ($q(t) \not\equiv 0$ суммируема):

$$x^{(n)} + \lambda q(t) x = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{11}$$

$$x(a) = x'(a) = \cdots = x^{(n-k-1)}(a) = \\ = x(b) = x'(b) = \cdots = x^{(k-1)}(b) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1). \quad (12)$$

Через $G(t,s)$ ниже обозначается функция Грина оператора $x^{(n)}$ при условиях (12). Определяя вид $G(t,t)$ (что не является тривиальной задачей ввиду произвольности k, n) и используя (10), приходим к предложению:

Теорема 2. *С.з. задачи* (11) – (12) *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \frac{(-1)^{(k+1)}}{(n-1)(k-1)!(n-k-1)!(b-a)^{n-1}} \int_a^b (t-a)^{n-1}(b-t)^{n-1} q(t)\, dt. \quad (13)$$

5. Формула (13) может быть использована, в частности, для оценки снизу наименьшего по модулю с.з. задачи (11) – (12), которое мы обозначим через $\lambda_1[q]$.

Лемма 2. *Справедливо неравенство* $|\lambda_1[q]| \geqslant \lambda_1[(-1)q^{k+1}|q|]$.

Это вытекает из того факта, что $(-1)^k G(t,s) \geqslant 0$ и известного неравенства между спектральными радиусами ядра и его модуля. Ниже для краткости положено

$$I[p] = \frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}} \int_a^b (t-a)^{n-1}(b-t)^{n-1} p(t) dt.$$

Теорема 3. *Справедлива оценка*

$$|\lambda_1[q]| > \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{I[|q|]}. \quad (14)$$

В силу леммы 2 достаточно ограничиться случаем вещественной $q(t)$ такой, что $(-1)^{k+1} q(t) \geqslant 0$. Но для этого случая удается воспользоваться весьма глубокими результатами М. Г. Крейна [2], которые, в частности, показывают, что рассматриваемая задача обладает бесконечным числом с.з. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем все они — простые, вещественные и положительные. Последнее показывает, что $\lambda_1^{-1} < \sum\limits_i \lambda_i^{-1}$, что, ввиду (13), и завершает доказательство.

6. В дальнейшем все функции предполагаются вещественными. Часто нужны оценки только для вещественных с.з.; при этом представляется правдоподобным, что для оценки снизу положительных (или сверху отрицательных) с.з. $q(t)$ в (14) может быть заменена функциями $q_+(t) = \max\{0, q(t)\}$ или $q_-(t) = \max\{0, -q(t)\}$ в зависимости от соображений четности. Для ряда случаев это предположение подтверждается. Именно, *пусть выполнено хотя бы одно из соотношений* $|n-2k| \leqslant 2$, $k=1$, $k = n-1$. *Если* k *нечетно (четно), то для наименьшего положительного с.з. задачи* (11)—(12) *справедливо* (14) *с заменой в правой части* $|q|$ *на* $q_+(q_-)$. Для отрицательных с.з. q_+ и q_-, очевидно, следует поменять местами. Это предложение охватывает, в частности, все задачи рассматриваемого вида для $n<7$. Остальные случаи требуют дополнительного исследования.

Ниже используются обозначения и терминология статьи [3]. Если положительные с.з. (11)—(12) больше 1, то $x^{(n)}+q(t)x=0$ не имеет нетривиальных решений с $(a, n-k; b, k)$ — нулями. Далее, легко проверить, что если $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ и $p(t) \geqslant 0$, то $I_1[p] \leqslant I[p]$, где $I_1[p]$ определяется аналогично $I[p]$, но с заменой a, b на a_1, b_1. Поэтому (14) можно переписать в виде

$$I[|q|] > (k-1)!(n-k-1)! \to x^{(n)} + q(t)x \in T_{n-k,k}, \tag{15}$$

причем для отмеченных выше случаев $|q|$ в левой части (15) может быть заменена на q_+ для нечетных k и на q_- для четных k.

Следствие 1. *Если* $I[q_+] \leqslant (n-2)!$, *то для оператора* $x^{(n)}+q(t)x$ *на* $[a,b]$ *справедлива теорема Чаплыгина.*

Это немедленно вытекает из предыдущего, поскольку $T_{n-1,1} \subset T$. Сказанное позволяет также получить эффективное и в то же время достаточно точное условие включения $x^{(n)}+q(t)x \in T_0$. Напомним, что неосцилляционность L влечет ряд сильных следствий (разложимость на «множители», различные теоремы сравнения, применимость к $Lx+\lambda p(t)x=0$ упомянутых теорем М. Г. Крейна и т.д.).

Определим числа α_n, β_n равенствами ($n \geqslant 2$, $\beta_2 = \infty$)

$$\alpha_{2m+1} = \beta_{2m+1} = (m-1)!m!\,, \ \alpha_{4m+2} = [(2m)!]^2, \ \alpha_{4m} = (2m-2)!(2m)!\,,$$
$$\beta_{4m+2} = (2m-1)!(2m+1)!\,, \ \beta_{4m} = [(2m-1)!]^2.$$

Теорема 4. *Если одновременно* $I[q_+] \leqslant \alpha_n$, $I[q_-] \leqslant \beta_n$, *то оператор* $x^{(n)} + q(t)x$ *является неосцилляционным на* $[a,b]$.

Здесь, как и в предшествующих оценках, константы и весовая функция неулучшаемы для каждого n. Это можно пояснить следующим образом: если $q(t) = c\delta(t-t_0)$, то все с.з. (11)—(12), кроме одного, «уходят в бесконечность», так что для этого предельного случая в (14) имеет место знак равенства.

Последние результаты для некоторых частных случаев были получены автором ранее [3, 4] другими средствами; при этом оценки формулировались в менее точной форме, а именно в терминах малости интегралов от $q_+(t)$, $q_-(t)$, которые связаны с $I[q_+]$, $I[q_-]$ очевидными неравенствами. Изложенный выше способ оценки наименьшего с.з., основными звеньями которого являются формула (10), нахождение $G(t,t)$, лемма 2 и теорема М. Г. Крейна, может быть применен и для более широкого класса краевых задач.

7. При доказательстве следующего предложения используются, в частности, некоторые факты теории положительных операторов [5] (см. также [6]).

Теорема 5. *Пусть* $L_0 \in T_0$, $q(t) \geqslant 0$. $Lx \equiv L_0x + (-1)^{k+1}q(t)x \in T_{n-k,k}$ *в том и только том случае, если существует* $y(t)$ *с* $(a, n-k; b, k)$*-нулями такая, что* $y(t) > 0$, $(-1)^k Ly \geqslant 0$, $Ly \not\equiv 0$ $(a < t < b)$.

Следствие 2. *Пусть* $L_0 \in T_0$, $q(t) \geqslant 0 (\leqslant 0)$. $Lx \equiv L_0x + q(t)x \in T_0$ *в том и только том случае, если для каждого нечетного (четного)* k, $1 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant n-1$ *существует* $y_k(t)$ *с* $(a, n-k; b, k)$*-нулями такая, что в интервале* (a,b) $y_k(t) > 0$, $Ly_k \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $Ly_k \not\equiv 0$.

Если L_0 — самосопряженный (например, $L_0x \equiv (x^{(m)})^{(m)} - (px^{(m-1)})^{(m-1)}$, $p(t) \geqslant 0$), то достаточно рассматривать лишь $k \leqslant n/2$. Поэтому, например, критерий неосцилляционности оператора $x^{(8)} + q(t)x$ со знакопостоянной $q(t)$ формулируется в терминах существования всего двух функций ($y_1(t), y_3(t)$ для случая $q(t) \geqslant 0$, $y_2(t), y_4(t)$ для $q(t) \leqslant 0$).

Литература

1. *Гельфонд, А. О.* О росте собственных значений однородных интегральных уравнений / А. О. Гельфонд // Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гостехиздат, 1957. — С. 233—263.
2. *Крейн, М. Г.* Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1939. — Т. 25, № 9. — С. 717—720.
3. *Левин, А. Ю.* О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1281—1284.
4. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512—515.
5. *Красносельский, М. А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Физматгиз, 1962. — 394 с.
6. *Азбелев, Н. В.* К вопросу о единственности решения интегрального уравнения / Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 239—242.

4. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций [5]

Ниже предлагается способ приближенной минимизации выпуклой функции нескольких переменных, основанный на одной элементарной геометрической идее. Предлагаемый *алгоритм центрированных сечений* (а.ц.с.) находит применение также в выпуклом программировании. А.ц.с. требует более сложной программы, чем градиентные методы, но эффективнее их в смысле оценки числа операций.

1. Рассматривается задача об ε-минимизации выпуклой функции m переменных $f(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_m)$ на выпуклом многограннике M_0 эвклидова пространства E_m, т. е. задача нахождения точки $X^0 \in M_0$ такой, что $f(X^0) - 2\varepsilon \leqslant \min f(X)$ на M_0 (погрешность формулы $\min f(X)$ на $M_0 \approx f(X^0) - \varepsilon$ не превосходит ε). Предполагается, что f удовлетворяет условию Липшица: $|f(X^1) - f(X^2)| \leqslant c\rho(X^1, X^2)$ для $X^1, X^2 \in M_0$ (постоянная c часто может быть указана из априорных соображений). Предполагается также, что выполнима следующая основная операция (о.о.) нашего алгоритма: для заданного $X^* \in M_0$ определяется направление $\operatorname{grad} f(X^*)$ (случай недифференцируемости f в точке X^* можно не рассматривать, так как, в силу выпуклости, f дифференцируема почти всюду). Желательно, естественно, чтобы число о.о., выполняемых в процессе ε-минимизации, было по возможности мало.

Для $m = 1$ ($M_0 = [a, b]$, о.о. состоит в определении $\operatorname{sign} f'(X^*)$) ε-минимизация осуществляется с помощью очевидного «половинения»: вычисление $\operatorname{sign} f'((a + b)/2)$ позволяет перейти от $[a, b]$ к одному из отрезков $[a, (a + b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$ и т. д. Число о.о., необходимых для ε-минимизации, как легко подсчитать, удовлетворяет неравенству $n \leqslant \max\{0, \log_2[c(b - a)/2\varepsilon]\}$. Покажем, что идея этого алгоритма, являющаяся при $m = 1$ тривиальной, может быть определенным образом реализована и в многомерном случае. Мы подробно рассмотрим случай $m = 2$, полностью выявляющий существо дела.

2. Осуществление о.о. для внутренней точки X^* многоугольника M_0 позволяет рассечь M_0 на две части прямой, проходящей через X^*, и отбросить одну из них, как не содержащую точки минимума X_{min}; действительно, если $\operatorname{grad} f(X^*) \neq 0$, то, ввиду выпуклости f,

$$(X_{min} - X^*, \operatorname{grad} f(X^*)) < 0$$

(если $\operatorname{grad} f(X^*) = 0$, то $X^* = X_{min}$). Оставшаяся часть, которую обозначим через M_1, снова является выпуклым многоугольником; выполняя

[5] Левин А. Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 6. С. 1244—1247. (Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 XI 1964.)

о.о. для внутренней точки M_1, по тому же принципу рассекаем M_1 на две части, одна из которых отбрасывается, и т.д.

Точки сечения (т. е. точки, для которых выполняются о.о.) желательно, разумеется, выбирать таким образом, чтобы *ведущие многоугольники* (в.м.) $M_0, M_1, M_2, \dots$, достаточно быстро «стягивались». Весьма целесообразным является выбор в качестве точки сечения в.м. M_k его центра тяжести ($k = 0, 1, \dots$). Эта рекомендация основана на известном геометрическом факте [1]: прямая, проходящая через центр тяжести выпуклого многоугольника площади s, делит его на части, площадь каждой из которых $\geqslant 4/9s$. Таким образом, при нашем алгоритме независимо от направления сечений, площадь s_k в.м. M_k не превзойдет $(5/9)^k s_0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Можно ожидать, что, наряду с площадями, диаметры d_k в.м. M_k обычно также будут убывать с геометрической* скоростью, но, вообще говоря, это необязательно, поскольку в.м. могут принимать сильно вытянутую форму; последнее, например, заведомо имеет место, если множество точек минимума f образует отрезок. Это осложнение можно преодолеть, используя тот факт, что выпуклая фигура малой площади хорошо «аппроксимируется» отрезком. Именно, определим алгоритм ε-минимизации следующим образом. Продолжаем центрированные сечения в.м. до тех пор, пока ширина в.м. не станет $\leqslant 2\varepsilon/c$; пусть для этого потребуется n_1 о.о. Затем заменяем M_{n_1} «аппроксимирующим» отрезком Δ, расстояние от которого до любой точки $M_{n_1} \leqslant \varepsilon/c$; очевидно, что можно выбрать Δ длины $d'_{n_1} \leqslant d_{n_1}$. Теперь решаем одномерную задачу $\varepsilon/2$-минимизации f на Δ. Для этой цели может быть использована та же о.о., так как направление $\operatorname{grad} f$ определяет знак производной по любому направлению; пусть затраченное на этом этапе число о.о. равно n_2. Середина X^0 последнего ведущего отрезка (длины $\leqslant 2\varepsilon/c$) дает решение задачи. В самом деле, так как $X_{min} \in M_{n_1}$, то найдется $x^1 \in \Delta$ такая, что $\rho(X_{min}, X^1) \leqslant \varepsilon/c$, откуда $f(X_{min}) \geqslant f(X^1) - \varepsilon \geqslant \min f(X) - \varepsilon \geqslant f(X^0) - 2\varepsilon$.

Оценим теперь общее число $n = n_1 + n_2$ затраченных о.о. Пусть $n_1 n_2 \neq 0$. Обозначая ширину M_i через h_i и учитывая известное неравенство $hd \leqslant 2s$ (см. [1]), получаем систему неравенств $h_{n_1-1} > 2\varepsilon/c$, $d'_{n_1-1}/2^{n_2-1} > 2\varepsilon/c$, $d'_{n_1} \leqslant d_{n_1} \leqslant d_{n_1-1}$, $h_{n_1-1}d_{n_1-1} \leqslant 2s_{n_1-1} \leqslant 2s_0(5/9)^{n_1-1}$, откуда $n = n_1 + n_2 < 1 + \log_{1,8}(s_0 c^2 \varepsilon^{-2})$. Если $n_1 \neq 0$, $n_2 = 0$, то, учитывая неравенства $h^2 \leqslant s\sqrt{3}$ (см. [1]), $h_{n_1-1} > 2\varepsilon/c$, приходим к лучшей оценке $n = n_1 \leqslant 1 + \log_{1,8}(1/4\sqrt{3}s_0 c^2 \varepsilon^{-2})$. Возможен также случай $n_1 = 0$ (если ширина M_0 настолько мала, что задача фактически одномерна); при этом

*Термины «геометрический», «геометричность» здесь и ниже указывают на аналогию со скоростью убывания геометрической прогрессии.

$n \leqslant \max\{0, \log_2(d_0' c\varepsilon^{-1})\}$. Окончательно получаем

$$n \leqslant \max\left\{0, \log_2(d_0' c\varepsilon^{-1}), 1 + \log_{1,8}(s_0 c^2 \varepsilon^{-2})\right\}.$$

Итак, для числа о.о., как и при $m = 1$, получена геометрическая оценка вида $n \leqslant \alpha + \beta|\ln\varepsilon|$; здесь α зависит только от размеров M_0 и константы Липшица, а β — постоянная.

3. Случай $m > 2$ не вносит принципиально новых моментов. Точно так же осуществление о.о. для внутренней точки X^* в.м. позволяет, в соответствии с неравенством $(X_{min} - X^*, \operatorname{grad} f(X^*)) < 0$ $(\operatorname{grad} f(X^*) \neq 0)$, рассечь в.м. на две части $(m-1)$-мерной гиперплоскостью, проходящей через X^*, и отбросить одну из этих частей. Выбор в качестве точек сечения центров тяжести в.м. опять-таки приводит к геометрической оценке числа о.о., поскольку соответствующая теорема об объемах имеет место и при $m > 2$: $(m-1)$-мерная гиперплоскость, проходящая через центр тяжести выпуклого m-мерного многогранника объема v, делит его на части, объем каждой из которых $\geqslant [1 - (1/(m+1))]^m v$. Доказательство этого предложения, принадлежащее в основной своей части Б.С. Митягину, использует, в частности, принцип симметризации Бруна—Минковского [2]. Для объемов v_k в.м. M_k можно дать, таким образом, не зависящую от размерности оценку $v_k < (1 - \mathrm{e}^{-1})^k v_0$ (к $= 1, 2, \dots$). Осложнения, возникающие ввиду возможности «сплющивания» в.м., преодолеваются тем же приемом понижения размерности.

4. Геометрическая оценка числа о.о. еще не означает, что аналогичная оценка имеет место для общего числа действий. В самом деле, на каждом шаге а.ц.с. выполняется работа двоякого характера: во-первых, о.о. и, во-вторых, работа, которую назовем вспомогательной, — нахождение и запоминание элементов нового в.м. (вершины, грани, центр тяжести). Пусть на k-м шаге эти этапы требуют соответственно l_k и l_k' действий. Если числа l_k естественно считать равномерно ограниченными, то для l_k' дело обстоит иначе, поскольку число r_k $(m-1)$-мерных граней в.м. M_k может неограниченно возрастать с ростом k (по крайней мере теоретически). Чтобы избежать этого неприятного во многих отношениях возрастания r_k, можно модифицировать а.ц.с. следующим образом.

Для каждого m существует γ_m такое, что в E_m всякий выпуклый многогранник объема v можно заключить в m-мерный симплекс объема $\leqslant \gamma_m v$ (для $m = 2$ известно неулучшаемое значение $\gamma_2 = 2$, см. [3]). Выберем целое $q > -\ln\gamma_m / \ln(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 2{,}18 \ln\gamma_m$ и дополним а.ц.с. следующим правилом: как только r_k становится равным $m + q$, M_k заключается в соответствующий m-мерный симплекс, который далее используется как в.м. Так как $r_{i+1} \leqslant r_i + 1$, то заключение будет осуществляться не чаще, чем через q шагов, что, в силу выбора q и приведенных выше оценок, обеспечивает геометрическое убывание объемов в.м. Поскольку число действий, необходимых для заключения, зависит только от m и q, приходим к геометрической оценке числа действий при ε-минимизации.

Для $m = 2$ более целесообразный способ избежать возрастания r_k состоит в следующем. Из теоремы Хелли вытекает, что в выпуклом 7-угольнике существует точка такая, что любая проходящая через нее прямая рассекает 7-угольник на части с числом сторон $\leqslant 6$ у каждой. Если при $r_k = 7$ выбирать в качестве точки сечения не центр тяжести M_k, а «точку Хелли» M_k (способ нахождения таких точек очевиден), то тем самым исключается возможность $r_k > 7$ и одновременно сохраняется геометричность метода.

Еще одна модификация для $m = 2$: если в качестве точек сечения выбирать центры тяжести вершин в.м. (нахождение их почти не требует вычислений), то площади в.м. опять-таки будут убывать с геометрической скоростью. (Доказательство основано на том, что r_k в процессе сечений возрастает «не менее интенсивно», чем убывает.)

Часто о.о. позволяет определять не только направление $\operatorname{grad} f(X^*)$, но и его величину, а также значение $f(X^*)$. Можно модифицировать а.ц.с. так, чтобы использовать эту дополнительную информацию для более быстрого сокращения в.м. Подробнее здесь на этом не останавливаемся.

Если M_0 априори не задан, то можно применить способ проб. Пусть, например, требуется минимизировать функцию на плоскости. Двумя о.о. точка X_{min} (если она существует), вообще говоря, заключается в некоторый угол ($< \pi$), а еще несколькими о.о. для более или менее удачно выбранных точек угла — в ограниченный выпуклый многоугольник.

5. Практическая применимость а.ц.с. представляется целесообразной лишь при малых m (скажем, при $m = 2, 3$), так как объем вспомогательной работы, по-видимому, быстро возрастает с ростом m. Вместе с тем следует отметить, что вспомогательная работа по существу не связана с видом минимизируемой функции, и поэтому соответствующие стандартные подпрограммы могут использоваться для широкого класса задач.

Существенным является вопрос о поведении r_k, требующий экспериментальной проверки. Для $m = 2$ было проведено несколько экспериментов; r_k при этом не возрастало, а колебалось в пределах 3—5. Что касается градиентных методов — основных «конкурентов» а.ц.с. — то, по-видимому, ни один из них не обеспечивает геометрической оценки числа итераций; отметим также, что использование а.ц.с. естественным образом снимает проблему величины шага, возникающую в градиентных методах. Имеют значение и такие факторы, как вид $f(X)$; приблизительно говоря, чем «хуже» $f(X)$, тем эффективнее а.ц.с. по сравнению с градиентными методами. Действительно, эффективность последних, как известно, в большой степени зависит от свойств минимизируемой функции, тогда как а.ц.с. в этом отношении мало чувствителен. Кроме того, с увеличением трудоемкости о.о. уменьшается удельный вес вспомогательной работы.

6. Рассмотрим вкратце одно из основных приложений а.ц.с. Задача выпуклого программирования состоит, как известно, в минимизации $f(X)$ при условиях $q_k(X) \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$, где $f, g_1, \ldots, g_r$ — выпуклые функции n переменных (n будем считать достаточно большим). Для широкого класса встречающихся на практике задач условия таковы, что

$$f(X) = \sum_{i=1}^{l} f^i(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i), \quad g_k(X) = \sum_{i=1}^{l} g_k^i(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i), \ k = 1, \ldots, m,$$

где $\{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, l$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n)$, — сравнительно небольшие группы переменных, и каждая из $g_{m+1}(X), \ldots, g_r(X)$ зависит только от переменных какой-либо одной группы. Примерами такого рода могут служить: задача блочного линейного программирования, задача, рассмотренная в [4], и многие другие. Трудность рассматриваемой задачи обусловлена «существенными» ограничениями $g_k(X) \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, так как при $m = 0$ задача расщепилась бы на ряд малоформатных задач, которые по сравнению с исходной можно считать элементарными. Покажем, что и при наличии небольшого числа m «существенных» ограничений вопрос может быть сведен к решению серии малоформатных задач.

Множество W в E_n, определенное условиями $g_k(X) \leqslant 0$, $k = m + 1, \ldots, r$, очевидно, выпукло. Мы должны минимизировать $f(X)$ на W при условиях $g_k(X) \leqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$. Как показывает обобщение теоремы Куна—Таккера (см. [5]), при небольших и естественных дополнительных предположениях эта задача эквивалентна задаче об отыскании в $W \times E'_m$ (E'_m — неотрицательный октант E_m) седловой точки функции $u(X, \Lambda) = f(X) + (\Lambda, G(X))$, где $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $G(X) = (g_1(X), \ldots, g_m(X))$. Итак, требуется найти $\max h(\Lambda)$ на E'_m, где $h(\Lambda) = \min u(X, \Lambda)$, $X \in W$, является, очевидно, вогнутой функцией. Для фиксированного $\Lambda = \Lambda^*$ задача минимизации $u(X, \Lambda^*)$ на W расщепляется на малоформатные задачи и поэтому несложна; если $X(\Lambda^*)$ — точка минимума и $h(\Lambda)$ дифференцируемая в точке Λ^*, то $\operatorname{grad} h(\Lambda^*) = G[X(\Lambda^*)]$. Мы пришли, таким образом, к задаче минимизации на E'_m выпуклой функции m переменных $h_1(\Lambda) = -h(\Lambda)$, причем для заданного Λ^* умеем находить $\operatorname{grad} h_1(\Lambda^*)$, т. е. находимся в условиях применимости а.ц.с. (при небольших m). Ввиду неограниченности E'_m следует прибегнуть (если не удается оценить $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ сверху из априорных соображений) к способу проб. Отметим еще, что $h_1(\Lambda^*)$ может оказаться не определенной (из-за неограниченности снизу $u(X, \Lambda^*)$ на W). Это затруднение, однако, несущественно, если для некоторой последовательности $X^1, X^2, \ldots$ такой, что $u(X^k, \Lambda^*) \to -\infty$, можно эффективно указать вектор G^*, к которому сходится по направлению какая-либо подпоследовательность векторов $G(X^k)$. Нетрудно показать, что $(\Lambda_{min} - \Lambda^*, G^*) \geqslant 0$, так что $-G^*$ можно формально использовать как $\operatorname{grad} h_1(\Lambda^*)$. Аналогичное замечание относится и к случаю, когда $\inf u(X, \lambda^*)$ конечен, но не достигается на W.

Тот же метод пригоден и для задач, содержащих в числе ограничений линейные равенства, с той разницей, что для соответствующих множителей Лагранжа снимается условие неотрицательности (см. [5]).

7. Схема случайного поиска, являющаяся в некотором смысле вероятностным аналогом а.ц.с., рассматривалась в [6].

Литература

1. *Яглом, А. М.* Выпуклые фигуры / А. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Серия Библиотека математического кружка, Вып. 4. — М.; Л.: ГТТИ, 1951. — 343 с.
2. *Минковский, Г.* Общие теоремы о выпуклых многогранниках / Г. Минковский // *УМН*. — 1936. — № 2. — С. 55—71.
3. *Яглом, А. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении / А. М. Яглом, И. М. Яглом. Серия Библиотека математического кружка, Вып. 5. — М.: ГТТИ, 1954. — 554 с.
4. *Бахтин, И. А.* Об отыскании экстремума одной функции на многограннике / И. А. Бахтин, М. А. Красносельский, А. Ю. Левин // *Журн. выч. матем. и мат. физики*. — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 400—409.
5. *Эрроу, К. Д.* Исследования по линейному и нелинейному программированию / К. Д. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. — Перев. с англ. изд. — М.: ИЛ, 1962. — 334 с.
6. *Левин, А. Ю.* Об одной схеме случайного поиска / А. Ю. Левин, А. С. Шварц // Труды семинара по функц. анализу. — Воронеж, 1963. — Вып. 7. — С. 67—69.

5. Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае[6]

§ 1. Классификация неколебательных случаев для знакопостоянной $q(t)$ (формулировки и обсуждение)

1.1. В настоящей работе исследуются вопросы неколебательного поведения решений уравнения

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (-\infty < a \leqslant t < b \leqslant \infty) \tag{1.1}$$

при $t \to b$. Коэффициенты $p(t)$, $q(t)$ предполагаются вещественными (если не оговорено противное); кроме того, на протяжении большей части работы $q(t)$ будет предполагаться знакопостоянной. Для простоты можно считать $p(t)$, $q(t)$ кусочно-непрерывными в полуинтервале $[a, b)$; в действительности существенно лишь, чтобы они были локально суммируемы на $[a, b)$. Как обычно, при этом предполагается, что соотношение (1.1) выполняется почти при всех t из $[a, b)$ и $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывна. Мы будем несколько пренебрегать этой малосущественной и стандартной стороной дела, употребляя, например, выражения «$q(t) \geqslant 0$» вместо «$q(t) \geqslant 0$ почти всюду», опуская требования абсолютной непрерывности первых производных и т. п. Поскольку изучаться будет лишь поведение решений при $t \to b$, очевидно, что такие требования, как, скажем, знакопостоянство $q(t)$, должны выполняться лишь в некоторой левой полуокрестности точки b; подобные оговорки также обычно будут опускаться.

Говорят, что для уравнения (1.1) имеет место неколебательность на $[a, b)$, если нетривиальные решения уравнения (1.1) имеют конечное число нулей на $[a, b)$ (это, в частности, заведомо имеет место, если $q(t) \leqslant 0$); противоположный случай, естественно, называется колебательным. Что касается проверки колебательности или неколебательности заданного уравнения, то по этому поводу можно заметить следующее. Известно весьма большое количество признаков колебательности и неколебательности, образующих в совокупности самостоятельный раздел качественной теории (см. [1–8]). Все известные необходимые и достаточные признаки являются неэффективными и формулируются обычно в терминах существования функций, удовлетворяющих определенным условиям; та или иная конкретизация этих функций приводит к эффективным достаточным (но уже не необходимым) признакам. Весьма вероятно, что эффективное необходимое и достаточное условие колебательности вообще не может быть указано, даже для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ на $[0, \infty)$ с $q(t)$, положительной и аналитической в $[0, \infty)$. Под «эффективным условием» мы понимаем алгоритм, требующий конечно-

[6] Левин А. Ю. Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае // Математический сборник. — 1968. — Т. 75(117), № 1. — С. 39—63.

го числа таких «простых» операций над коэффициентами, как элементарные операции, квадратуры, сравнение функций и т. п. Было бы интересно изучить этот вопрос в той или иной точной постановке.

Вместе с тем следует отметить, что большинство практически встречающихся уравнений с неотрицательной $q(t)$ попадает в сферу действия какого-либо из употребительных эффективных признаков, так что проверка на колебательность конкретных уравнений со знакопостоянной $q(t)$ обычно не вызывает трудностей. В настоящей работе мы часто будем соприкасаться с неколебательностью; некоторые из установленных ниже фактов сами могут трактоваться как признаки колебательности или неколебательности, в других случаях неколебательность выступает как предпосылка (для проверки которой, в соответствии со сказанным, могут привлекаться результаты, изложенные в работах [1–8]).

Ниже для случая знакопостоянной $q(t)$ будет получена полная классификация возможных типов неколебательных фундаментальных систем решений (1.1), учитывающая следующие свойства решений при $t \to b$: стремление к нулю, к бесконечности, к ненулевому пределу, монотонное возрастание или убывание вблизи точки b (при сделанных предположениях, как будет видно из дальнейшего, каждое решение монотонно вблизи b). Для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ при $b = \infty$ такая классификация была дана в работах Э. Хилле [2] и И. М. Соболя [3], [9]; в этом случае имеются два типа неколебательных фундаментальных систем при $q(t) \geqslant 0$ и два типа — при $q(t) \leqslant 0$; определяющую роль при этом играет сходимость или расходимость $\int^{\infty} tq(t)dt$. В общем случае многообразие возможных типов заметно возрастает, так как добавляется ряд существенно новых асимптотик; в частности, появляются случаи, соответствующие устойчивости и асимптотической устойчивости тривиального решения, тогда как при $p(t) \equiv 0$, $b = \infty$ в неколебательном случае всегда есть неограниченные решения и, следовательно, имеет место неустойчивость.

В этом параграфе формулируются и обсуждаются «классификационные» утверждения. В § 2 устанавливаются теоремы о возмущении (представляющие и самостоятельный интерес), с помощью которых доказываются утверждения из § 1. В § 3 рассматриваются некоторые дополнения и приложения полученных результатов: в частности, исследуется влияние изменения «коэффициента трения» $p(t)$ на колебательность решений. Большая часть результатов настоящей работы была ранее кратко изложена в [8, 10, 11].

1.2. В качестве фундаментальной системы $x_1(t)$, $x_2(t)$ в дальнейшем выбирается пара линейно независимых решений уравнения (1.1), положительных вблизи точки b, причем в качестве $x_2(t)$ выбирается минимальное решение, т. е. единственное с точностью до постоянного множителя решение, удовлетворяющее условию (точка c выбирается правее нулей $x_2(t)$)

$$\int_c^b \exp\Big(-\int^t p(s)\,ds\Big)x_2^{-2}(t)\,dt=\infty.$$

Существование такого решения в неколебательном случае вытекает из известных формул, связывающих линейно независимые решения (1.1); те же формулы показывают, что $\dfrac{x_2(t)}{x_1(t)}\downarrow 0\quad (t\to b)$ для любого положительного решения $x_1(t)$ ($\not\equiv kx_2(t)$), чем и объясняется название «минимальное решение» (по поводу минимальных решений для случая $b=\infty$ см., например, [9, 12]). Особые свойства минимального решения делают весьма целесообразным включение его в фундаментальную систему, поскольку такие системы наиболее рельефно характеризуют поведение решений при $t\to b$.

Выбор $x_1(t)$, в отличие от $x_2(t)$, не является однозначным с точностью до множителя. В соответствии с этим, встречающееся ниже обозначение $x_1\uparrow\downarrow 1$ означает, что среди неминимальных решений есть и монотонно возрастающие, и монотонно убывающие к единице (а следовательно, и к любой ненулевой постоянной). Соответственно, запись $x_1\uparrow 1$ означает, что любое положительное неминимальное решение возрастает к конечному пределу; аналогичный смысл имеют записи $x_1\downarrow 1$, $x_1\uparrow\infty$, $x_1\downarrow 0$. Все утверждения, относящиеся к монотонности, выполняются, разумеется, лишь для t, достаточно близких к b; монотонность можно всюду понимать в строгом смысле, если $q(t)\not\equiv 0$ вблизи b.

Определяющую роль для поведения решений уравнения (1.1) при $t\to b$ играет сходимость или расходимость следующих интегралов:

$$\mathfrak{J}_1(p)=\int^b \exp\Big(-\int^t p(\tau)\,d\tau\Big)\,dt,\quad \mathfrak{J}_2(p,q)=\int^b q(t)\exp\Big(\int^t p(\tau)\,d\tau\Big)\,dt,$$

$$\mathfrak{J}_3(p,q)=\int^b q(t)\,dt\int_t^b \exp\Big(\int_s^t p(\tau)\,d\tau\Big)\,ds,$$

$$\mathfrak{J}_4(p,q)=\int^b q(t)\,dt\int^t \exp\Big(\int_s^t p(\tau)\,d\tau\Big)\,ds.$$

Интеграл $\mathfrak{J}_3$ рассматривается лишь при $\mathfrak{J}_1<\infty$, а $\mathfrak{J}_4$ — лишь при $\mathfrak{J}_1=\infty$. Непроставленные пределы интегрирования выбираются в $[a,b)$ произвольным образом, так как их выбор не влияет на сходимость.

1.3. Переходим теперь непосредственно к классификации.

Теорема 1.1 (см. [11]). *Неколебательное поведение при $t\to b$ решений уравнения* (1.1) *со знакопостоянной $q(t)$ характеризуется таблицей 1 (см. стр. 54).*

Нетрудно видеть, что таблица исчерпывает все возможные случаи (ясно, что $|\mathfrak{I}_3| < \infty$ в случае 1 и $|\mathfrak{I}_2| = \infty$ в случае 3). В случаях 3A и 5A, отмеченных звездочкой, неколебательность решений является необходимым требованием; в остальных случаях она является следствием других условий и поэтому может специально не оговариваться.

Поскольку поведение решений в случаях 3B и 5B аналогично, имеем 5 различных типов неколебательного поведения решений при $q(t) \geqslant 0$ и 4 различных типа при $q(t) \leqslant 0$; в целом же при знакопостоянной $q(t)$ оказывается 8 различных типов неколебательного поведения решений (так как случаи 1A, 1B аналогичны). Этот подсчет, разумеется, связан с теми перечисленными выше характеристиками поведения решений, которые были положены в основу классификации. Если, например, игнорировать различия, связанные с возрастанием или убыванием, то цифры 5, 4, 8, как легко проверить, сократятся соответственно до 4, 3, 5; если же, наоборот, дополнительно учитывать такие факторы, как скорость убывания и роста решений, количество различных случаев станет, очевидно, бесконечным.

Таблица 1.

	$\mathfrak{I}_1$	$\lvert\mathfrak{I}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{I}_3\rvert$	$\lvert\mathfrak{I}_4\rvert$	A $q(t) \geqslant 0$	B $q(t) \leqslant 0$
1	$<\infty$	$<\infty$			$x_1 \uparrow\downarrow 1, \quad x_2 \downarrow 0$	
2	$<\infty$	∞	$<\infty$		$x_1 \downarrow 1,\ x_2 \downarrow 0$	$x_1 \uparrow 1,\ x_2 \downarrow 0$
3	$<\infty$		∞		* $x_1 \downarrow 0,\ x_2 \downarrow 0$	$x_1 \uparrow \infty,\ x_2 \downarrow 0$
4	∞			$<\infty$	$x_1 \uparrow \infty,\ x_2 \uparrow 1$	$x_1 \uparrow \infty,\ x_2 \downarrow 1$
5	∞			∞	* $x_1 \uparrow \infty,\ x_2 \uparrow \infty$	$x_1 \uparrow \infty,\ x_2 \downarrow 0$

Вместо $\mathfrak{I}_3$, $\mathfrak{I}_4$ можно было бы использовать встречающиеся в [8, 10, 13, 14], интегралы

$$\mathfrak{I}_3^*(p,q) = \int^b dt \int^t q(s) \exp\left(\int_t^s p(\tau)\, d\tau \right) ds,$$

$$\mathfrak{I}_4^*(p,q) = \int^b dt \int_t^b q(s) \exp\left(\int_t^s p(\tau)\, d\tau \right) ds,$$

Учитывая знакопостоянство $q(t)$, можно убедиться элементарными средствами (см. § 2) в том, что при $\mathfrak{I}_1 < \infty$ сходимость $\mathfrak{I}_3$ эквивалентна сходимости $\mathfrak{J}_3^*$, а при $\mathfrak{J}_1 = \infty$ сходимость $\mathfrak{J}_4$ эквивалентна сходимости $\mathfrak{J}_2$ и $\mathfrak{J}_4^*$. Если составить таблицу не для $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$, а для $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3^*$, $\mathfrak{J}_4^*$ то строки 1—4 останутся без изменений, а 5-я строка (для случая $q(t) \geqslant 0$) распадется на две, и конец таблицы будет выглядеть следующим образом:

Таблица 2.

	$\mathfrak{J}_1$	$\lvert\mathfrak{J}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_3^*\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_4^*\rvert$	A $q(t) \geqslant 0$	B $q(t) \leqslant 0$
...	...		...	...	......	......
5	∞	$< \infty$		∞	* $x_1 \uparrow \infty$, $x_2 \uparrow \infty$	$x_1 \uparrow \infty$, $x_2 \downarrow 0$
6	∞	∞			—	$x_1 \uparrow \infty$, $x_2 \downarrow 0$

Случай 6A для неколебательного уравнения невозможен: соотношения $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \infty$ влекут за собой колебательность решений (это верно и для знакопеременной $q(t)$). Таким образом, в этом варианте таблица за счет небольшого усложнения дает некоторую дополнительную информацию. В целом же, использование $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$ или $\mathfrak{J}_3^*$, $\mathfrak{J}_4^*$ приводит (в случае знакопостоянной $q(t)$) к сходным формулировкам; мы подробно остановились на этом параллелизме главным образом для удобства при сопоставлении результатов различных работ.

Что касается скорости роста или убывания решений, то в случаях 1, 2, 4, когда одно из решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ стремится к ненулевой постоянной, асимптотический вид второго легко определяется из формул

$$x_1(t) = c_1 x_2(t) \int^t \exp\left(-\int^s p(\tau)\,d\tau\right) x_2^{-2}(s)\,ds + c_2 x_2(t)\ (c_1 > 0),$$

$$x_2(t) = c x_1(t) \int_t^b \exp\left(-\int^s p(\tau)\,d\tau\right) x_1^{-2}(s)\,ds\ (c > 0).$$

Для случаев 3, 5 могут быть использованы оценки, приводимые в § 3 (теорема 3.1).

1.4. Общая систематизация неколебательных случаев до работы [11], по-видимому, не проводилась; однако ряд отдельных результатов, относящихся к тем или иным случаям, был получен ранее различными авторами. Так, важный случай $p(t) \equiv 0$, $b = \infty$, как уже отмечалось, изучен в работах Э. Хилле [2] и И. М. Соболя [3, 9]; этот случай покрывается строками 4, 5 таблицы 1 $\Big($при $p(t) \equiv 0$, $b = \infty$ имеем, очевидно, $\mathfrak{J}_1 = \infty$, $\mathfrak{J}_4 =$

$= \int\limits^{\infty} tq(t)\,dt\Big)$. Результаты работ [2, 3, 9] будут использоваться нами ниже при общих рассмотрениях. Ряд частных результатов для $b = \infty$, относящихся к различению случаев 1—2, с одной стороны, и случая 3 — с другой, приводился в работах З. Опяля [13], автора [10] и Н. Георгиу [14]. В частности З. Опяль, накладывая на коэффициенты ограничения $p(t) \geqslant l > 0$, $0 < m \leqslant q(t) \leqslant l^2/4$ (эти требования, как легко видеть, обеспечивают конечность $\mathfrak{J}_1(p)$ и неколебательность), показал, что решения уравнения (1.1) монотонно стремятся к нулю или к различным конечным пределам в зависимости от расходимости или сходимости $\mathfrak{J}_3^*(p,1)$. В работах [10, 14] константные ограничения на коэффициенты были заменены более общими, чем в [13], интегральными условиями $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, $|\mathfrak{J}_3^*(p,q)| < \infty$, $\mathfrak{J}_3^*(p,q) = \infty$; отметим, что формулировки работы [14] содержат ряд лишних требований. Специфика случая 1А (в отличие от 2А) использовалась в [8], где, в частности, изучалось, как влияет изменение $p(t)$ на колебательность; в этом вопросе основное значение имеет наличие возрастающих или убывающих положительных решений (см. § 3).

Как нам кажется, вышеприведенные таблицы вносят в эти вопросы полную ясность. Идентичность формулировок для случаев $b = \infty$ и $b < \infty$ (последний случай, по-видимому, ранее мало исследовался) свидетельствует о естественности применяемых интегральных условий.

1.5. Утверждения, относящиеся к случаям 3А, 5А, в приложениях естественно сочетать с какими-либо признаками неколебательности (исключая, разумеется, такие признаки, как $q(t) \leqslant 0$ или $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_3 < \infty$ или $\mathfrak{J}_1 = \infty$, $\mathfrak{J}_4 < \infty$). Возможны, однако, и другие схемы применения, не связанные с привлечением условий неколебательности. Примером такого рода может служить теорема 7 из [10]: *если* $p(t) \geqslant l > 0$, $0 \leqslant q(t) \leqslant 3{,}045 l^2$ *и* $\mathfrak{J}_3^*(p,q) = \infty$ *(здесь* $b = \infty$*), то все решения* (1.1) *вместе со своими первыми производными стремятся к нулю при* $t \to \infty$ (т. е. тривиальное решение (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову).

Асимптотическая устойчивость в колебательном случае обеспечивается здесь количественным значением верхней границы для $q(t)$, а неколебательный случай «обслуживается» условием $\mathfrak{J}_3^* = \infty$: так как $b = \infty$ и $p(t) \geqslant l > 0$, то $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, так что при неколебательности здесь имеет место случай 3А. Вообще говоря, в случае 3А нельзя гарантировать, что $\dot{x}_1(t) \to 0$, $\dot{x}_2(t) \to 0$ при $t \to b = \infty$, но это становится справедливым, если дополнительно предположить, что $p(t)$ ограничена сверху или что $p(t)$ ограничена снизу, а $q(t)$ — сверху (как в нашем случае); по этому поводу см. теорему 2.3 в § 2. Отметим, что условие $\mathfrak{J}_3^* = \infty$ (эквивалентное, разумеется, условию $\mathfrak{J}_3 = \infty$) в формулировке приведенной теоремы носит необходимый характер, так как при $\mathfrak{J}_3^* < \infty$ имел бы место один из случаев

1A, 2A, и поэтому нашлись бы решения уравнения (1.1), не стремящиеся к нулю при $t \to \infty$. Условие $\mathfrak{J}_3^*(p,q) = \infty$ представляет собой, приблизительно говоря, некоторое интегральное ограничение на совместную скорость роста $p(t)$ и убывания $q(t)$; как отмечалось в [8], оно выполняется, в частности, если $p(t) \leqslant c_1 t^r$, $q(t) \geqslant c_2 t^{r-1}$ для некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ (это легко устанавливается с помощью общеизвестных асимптотических формул).

1.6. Некоторые из приведенных выше утверждений допускают обобщение на случай произвольной (вообще говоря, комплекснозначной) функции $q(t)$, однако при этом теряется та окончательность, которая характерна для вещественной знакопостоянной $q(t)$. Пример: *для того чтобы уравнение* (1.1) *обладало фундаментальной системой решений вида $x_1(t) = 1 + o(1)$, $x_2(t) = o(1)$ при $t \to b$, достаточно (а в случае знакопостоянной функции $q(t)$ и необходимо), чтобы выполнялись условия $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, $\mathfrak{J}_3^*(p, |q|) < \infty$.*

Это утверждение для $b = \infty$ было сформулировано в [10] ($\mathfrak{J}_3^*$ опять-таки может быть заменено на $\mathfrak{J}_3$); впрочем, достаточность (при $b = \infty$) получена еще А. Винтнером [15].

Еще один результат такого же характера: *для того чтобы существовали решения* (1.1)*, стремящиеся при $t \to b$ к ненулевым постоянным, достаточно (а в случае знакопостоянной $q(t)$ и необходимо), чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:*

1) $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, $\mathfrak{J}_3(p, |q|) < \infty$;

2) $\mathfrak{J}_1(p) = \infty$, $\mathfrak{J}_4(p, |q|) < \infty$.

Необходимый и достаточный характер этих утверждений при знакопостоянной $q(t)$ непосредственно усматривается из таблиц.

1.7. Теорема 1.1 естественным образом распространяется на уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right] + f(t)x = 0 \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty)\,, \tag{1.2}$$

где $r(t) > 0$ (можно требовать несколько меньшего, см. § 2); для перехода от (1.1) к (1.2) достаточно умножить (1.1) на $\exp\left(\int^t p(\tau)\,d\tau\right)$. При таком переходе, очевидно,

$$r(t) = \exp\left(\int^t p(\tau)\,d\tau\right), \quad f(t) = q(t)\exp\left(\int^t p(\tau)\,d\tau\right)$$

(так что, в частности, $\operatorname{sign} f(t) \equiv \operatorname{sign} q(t)$). Поэтому $\mathfrak{J}_1(p)$, $\mathfrak{J}_2(p,q)$, $\mathfrak{J}_3(p,q)$, $\mathfrak{J}_4(p,q)$, $\mathfrak{J}_3^*(p,q)$, $\mathfrak{J}_4^*(p,q)$ для уравнения (1.2) заменяются соответственно следующими (кстати, более компактными) выражениями:

$$I_1(r)=\int^b \frac{dt}{r(t)},\quad I_2(f)=\int^b f(t)\,dt,\quad I_3(r,f)=\int^b f(t)\,dt\int_t^b \frac{ds}{r(s)},$$

$$I_4(r,f)=\int^b f(t)\,dt\int^t \frac{ds}{r(s)},\quad I_3^*(r,f)=\int^b \frac{dt}{r(t)}\int^t f(s)\,ds,$$

$$I_4^*(r,f)=\int^b \frac{dt}{r(t)}\int_t^b f(s)\,ds.$$

Таблицы 1, 2 остаются в силе и для уравнения (1.2), надо лишь заменить $\mathfrak{J}_k$, $\mathfrak{J}_k^*$ на I_k, I_k^*. Минимальное решение $x_2(t)$ в новых терминах определяется, очевидно, соотношением

$$\int^b \frac{dt}{r(t)x_2^2(t)}=\infty.$$

§ 2. Теоремы о возмущении. Доказательства утверждений, изложенных в § 1

2.1. В дальнейшем мы часто пользуемся записью уравнения (1.1) в форме (1.2), что, как отмечалось, приводит к более компактным формулам. При этом предполагается, что $r(t)\geqslant 0$, функции $\frac{1}{r(t)}$ и $f(t)$ локально суммируемы на $[a,b)$, а функции $r(t)$ и $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывны в $[a,b)$ (впрочем, для многих вопросов существенна лишь абсолютная непрерывность произведения $r\dot{x}$). Выясним, как связано поведение решений уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dy}{dt}\right]+h(t)y=0\quad(a\leqslant t<b\leqslant\infty)\,,\tag{2.1}$$

где $h(t)$ вещественна, с поведением решений «возмущенного» уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right]+[h(t)+f(t)]x=0\quad(a\leqslant t<b)\tag{2.2}$$

при $t\to b$. Предполагается, что решения (2.1) не колеблются на $[a,b]$ (для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится лишь случай $h(t)\equiv 0$). Фундаментальные системы для всех вещественных уравнений неколебательного типа выбираются, как и прежде, из решений, положительных вблизи точки b, причем второе из решений — минимальное при $t\to b$.

Теорема 2.1. *Пусть комплекснозначная функция $f(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int^b y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt < \infty. \tag{2.3}$$

Тогда (2.2) *обладает фундаментальной системой $x_1(t)$, $x_2(t)$ такой, что при $t \to b$*

$$x_1(t) = y_1(t)[1 + o(1)], \quad x_2(t) = y_2(t)[1 + o(1)], \tag{2.4}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}_1(t)[1 + o(1)] + o\left(\frac{1}{ry_2}\right), \quad \dot{x}_2(t) = \dot{y}_2(t)[1 + o(1)] + o\left(\frac{1}{ry_1}\right). \tag{2.5}$$

Из (2.4), очевидно, следует, что для любого решения $x(t)$ уравнения (2.2) найдется решение $y(t) \sim x(t)$ $(t \to b)$ уравнения (2.1).

Следующий результат относится к случаю вещественной знакопостоянной $f(t)$ и показывает, в частности, что при знакопостоянных возмущениях условие (2.3) является не только достаточным, но и необходимым для любого из соотношений (2.4).

Теорема 2.2. *Пусть $f(t)$ знакопостоянна и*

$$\int^b y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt = \infty. \tag{2.6}$$

Тогда:

а) если $f(t) \geqslant 0$ и решения (2.2) *не колеблются, то*

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \downarrow 0, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \uparrow \infty \quad (t \to b); \tag{2.7}$$

б) если $f(t) \leqslant 0$, то

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \uparrow \infty, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \downarrow 0 \quad (t \to b). \tag{2.8}$$

Для $r(t) \equiv 1$, $b = \infty$ теорема 2.1 была доказана А. Халанаем [16], который установил также необходимость условия (2.3) для выполнения соотношений (2.4) в случае знакопостоянной $f(t)$ при некоторых дополнительных предположениях (как показывает теорема 2.2, они излишни). А. Халанай пользовался методом последовательных приближений; мы здесь применим другой прием, который можно назвать «редукцией окрестностей». Суть его состоит в следующем: с помощью соответствующих замен переменной и функции вопрос о возмущении уравнения общего вида (2.1) сводится к вопросу о возмущении некоторого простейшего уравнения (в нашем случае это $\ddot{v} = 0$); здесь используются известные результаты, после чего возвращаемся к исходному уравнению. Отметим, что этот прием, несмотря на свой элементарный характер, имеет весьма много приложений (также и для уравнений колебательного типа). Здесь мы на этом не будем останавливаться.

Нам понадобятся следующие известные факты.

Лемма 2.1. *(см. [17], а также [2, 3, 18, 19]). Если комплекснозначная функция $\varepsilon(s)$ удовлетворяет условию*

$$\int^{\infty} s|\varepsilon(s)|\, ds < \infty, \tag{2.9}$$

то уравнение

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \varepsilon(s)v = 0 \quad (0 \leqslant s < \infty) \tag{2.10}$$

обладает фундаментальной системой $v_1(s)$, $v_2(s)$ такой, что при $s \to \infty$

$$v_1 = s[1 + o(1)], \quad v_2 \to 1, \tag{2.11}$$

$$\frac{dv_1}{ds} \to 1, \quad \frac{dv_2}{ds} = o\left(\frac{1}{s}\right). \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. *(см. [2, 3, 9]). Пусть $\varepsilon(s)$ знакопостоянна и*

$$\int^{\infty} s|\varepsilon(s)|\, ds = \infty. \tag{2.13}$$

Тогда: а) если $\varepsilon(s) \geqslant 0$ и решения уравнения (2.10) *не колеблются, то*

$$\frac{v_1}{s} \downarrow 0, \quad v_2 \uparrow \infty \quad (s \to \infty); \tag{2.14}$$

б) если $\varepsilon(s) \leqslant 0$, то

$$\frac{v_1}{s} \uparrow \infty, \quad v_2 \downarrow 0 \quad (s \to \infty). \tag{2.15}$$

Из вогнутости $v_1(s)$, $v_2(s)$ в случае а) и выпуклости их в случае б) вытекает также, что $\dot{v}_1 \downarrow 0$, $\dot{v}_2 \downarrow 0$ в условиях а) и $\dot{v}_1 \uparrow \infty$, $\dot{v}_2 \uparrow 0$ в условиях б).

Переходим к доказательству теорем 2.1 и 2.2. Без ограничения общности можно считать, что $y_2(t) > 0$ на $[a, b)$ и

$$s(t) = \frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \int_a^t \frac{d\tau}{r(\tau)y_2^2(\tau)} \tag{2.16}$$

(ясно, что выбор функции $y_1(t)$ не имеет значения). Очевидно, $s(t)\uparrow\infty$ при $t\to b$. Положим

$$x(t)=y_2(t)v(t) \tag{2.17}$$

и введем новую переменную $s=s(t)$, определенную соотношением (2.16). Тогда, как показывает подсчет, (2.2) перейдет в следующее уравнение:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{ds^2}+\tilde{r}\tilde{y}_2^4\tilde{f}\tilde{v}=0 \quad (0\leqslant s<\infty). \tag{2.18}$$

Здесь $\tilde{v}(s)=v[t(s)]$ и такой же смысл имеют $\tilde{r}(s)$, $\tilde{y}_2(s)$, $\tilde{f}(s)$. Мы получили, таким образом, уравнение вида (2.10) с $\varepsilon(s)=\tilde{r}(s)\tilde{y}_2^4(s)\tilde{f}(s)$; для применимости лемм 2.1 и 2.2 основное значение имеет поэтому сходимость или расходимость интеграла

$$\int^{\infty} s|\varepsilon(s)|\,ds=\int^{\infty} s\tilde{r}(s)\tilde{y}_2^4(s)|\tilde{f}(s)|\,ds=$$
$$=\int^{b}\frac{y_1(t)}{y_2(t)}r(t)y_2^4(t)|f(t)|\frac{dt}{r(t)y_2^2(t)}=\int^{b} y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt. \tag{2.19}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 получаются теперь как следствия лемм 2.1 и 2.2, отнесенных к уравнению (2.18). В самом деле, пусть уравнение (2.2) удовлетворяет условиям теоремы 2.1; тогда, в силу (2.19), уравнение (2.18) удовлетворяет условиям леммы 2.1 и обладает поэтому фундаментальной системой $\tilde{v}_1(s)$, $\tilde{v}_2(s)$, для которой выполнены соотношения (2.11), (2.12). В соответствии с (2.17) определим решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ уравнения (2.2) формулами

$$x_i(t)=y_2(t)v_i(t),\quad i=1,2. \tag{2.20}$$

В силу (2.11), имеем:

$$x_1(t)=y_2(t)v_1(t)\sim y_2(t)s(t)=y_1(t),\quad x_2(t)=y_2(t)v_2(t)\sim y_2(t)\quad (t\to b).$$

Соотношения (2.4), таким образом, доказаны.

Для доказательства соотношений (2.5) следует переписать (2.12), возвращаясь к переменной t:

$$ry_2^2\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{y_2}\right)\to 1,\quad ry_2^2\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)=o\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\quad (t\to b).$$

Раскрывая скобки и заменяя $\dot{y}_2$ на $\dfrac{1}{y_1}\left(\dot{y}_1y_2-\dfrac{1}{r}\right)$, а x_i на $y_i[1+o(1)]$, $i=1,2$, получаем (2.5). Теорема 2.1 доказана.

Пусть теперь для уравнения (2.2) выполнены условия теоремы 2.2а (2.2б). Неколебательность решений (2.2) на $[a,b)$ эквивалентна неколебательности решений (2.18) на $[0,\infty)$, и знак коэффициента при $\tilde{v}(s)$ в (2.18) совпадает со знаком $f(t)$. Учитывая (2.19), убеждаемся, что для (2.18) выполнены условия леммы 2.2а (2.2б), и фундаментальная система $\tilde{v}_1(s)$, $\tilde{v}_2(s)$ должна поэтому удовлетворять соотношениям (2.14), (2.15), откуда

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} = \frac{v_1(t)}{s(t)} \downarrow 0\,(\uparrow\infty), \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} = v_2(t)\uparrow\infty\,(\downarrow 0) \quad (t \to b),$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще (хотя нам это и не потребуется), что в условиях теоремы 2.1 для отыскания x_1, x_2 применим метод последовательных приближений (если известны y_1, y_2). Это делается по тем же схемам, что и в работах А. Халаная, У. Ришарда и М. Раба (см. [16, 20, 21]), где подробно изучался вопрос о последовательных приближениях в условиях типа (2.3) (при $b = \infty$). В связи с этим нельзя не упомянуть также работу Ю. Б. Гермейера и Д. С. Иргера [22].

2.2. Переходим к доказательству теоремы 1.1. Для этого применим теоремы 2.1 и 2.2 к уравнению (1.2), рассматривая последнее как возмущение уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dy}{dt}\right] = 0, \quad (a \leqslant t < b). \tag{2.21}$$

Решая уравнение (2.21), получаем, в соответствии с вышепринятым правилом нумерации, два возможных варианта для фундаментальной системы:

$$1)\ I_1(r) = \int^b \frac{dt}{r(t)} < \infty; \quad y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \int_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)}; \tag{2.22}$$

$$2)\ I_1(r) = \int^b \frac{dt}{r(t)} = \infty; \quad y_1(t) = \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \quad y_2(t) = 1. \tag{2.23}$$

Пусть $I_1(r) < \infty$ (так как $I_1(r) = \mathfrak{J}_1(p)$, то этому соответствуют случаи 1—3 таблиц). В силу (2.22), имеем

$$\int^b y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt = \int^b |f(t)|\,dt \int_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)} = I_3(r, |f|). \tag{2.24}$$

Поэтому, если $I_3(r, |f|) < \infty$, то, в силу теоремы 2.1, уравнение (1.2) обладает фундаментальной системой $x_1(t)$, $x_2(t)$ такой, что

$$x_1(t) \to 1, \quad x_2(t) \sim \int_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)} \quad (t \to b), \tag{2.25}$$

$$\dot{x}_1(t)r(t)\int\limits_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)} \to 0, \quad \dot{x}_2(t) \sim -\frac{1}{r(t)} \quad (t \to b). \tag{2.26}$$

Это верно для произвольной (вообще говоря, комплекснозначной) функции $f(t)$; если $f(t)$ знакопостоянна, то $I_3(r,|f|)$, очевидно, можно заменить на $|I_3(r,f)|$.

Для случая, когда $f(t)$ знакопостоянна и $|I_3| = \infty$, в силу теоремы 2.2, получаем:

а) если $f(t) \geqslant 0$, $I_1 < \infty$, $I_3 = \infty$ и решения (1.2) не колеблются, то

$$x_1(t) \downarrow 0, \quad x_2(t)\biggl(\int\limits_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)}\biggr)^{-1} \uparrow \infty \quad (t \to b);$$

б) если $f(t) \leqslant 0$, $I_1 < \infty$, $I_3 = -\infty$, то

$$x_1(t) \uparrow \infty, \quad x_2(t)\biggl(\int\limits_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)}\biggr)^{-1} \downarrow 0 \quad (t \to b).$$

В обоих случаях, очевидно, $x_2(t) \downarrow 0$ $\bigl($для а) это следует из $\dfrac{x_2}{x_1} \downarrow 0\bigr)$.

Для того чтобы закончить рассмотрение случаев 1—3, осталось выяснить вопрос о возрастании или убывании $x_1(t)$, определяющий различие между случаями 1 и 2. Пусть имеет место случай 2A (2B): $f(t) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), $I_1 < \infty$, $|I_2| = \infty$, $|I_3| < \infty$. Из (1.2) легко находим

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{r(t)}\biggl(c - \int\limits_a^t f(\tau)x_1(\tau)\,d\tau\biggr). \tag{2.27}$$

Так как, по доказанному, $x_1(t) \to 1$ при $t \to b$, то из условия $I_2(f) = \int\limits^b f(\tau)\,d\tau = \infty(-\infty)$ и знакопостоянства $f(t)$ следует, что

$$\int\limits^b f(\tau)x_1(\tau)\,d\tau = \infty\,(-\infty).$$

Отсюда и из (2.27) вытекает отрицательность (положительность) функции $\dot{x}_1(t)$ вблизи точки b.

Поведение $x_1(t)$ (с точки зрения монотонности) в случае 1 ($I_1 < \infty$, $|I_2| < \infty$) можно выяснить, произведя в уравнении (1.2) замену переменной

$$s = \int\limits_a^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \tag{2.28}$$

которая является полезной и в других отношениях; уравнение (1.2) после умножения на r примет вид

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \tilde{r}\tilde{f}\tilde{x} = 0 \quad \left(0 \leqslant s < s^* = \int\limits_a^b \frac{d\tau}{r(\tau)}\right). \tag{2.29}$$

Здесь $\tilde{x}(s) = x[t(s)]$, и таков же смысл $\tilde{r}(s)$, $\tilde{f}(s)$. Так как $I_1 < \infty$, то промежуток $[0, s^*)$ является ограниченным; далее,

$$\int\limits_0^{s^*} |\tilde{r}(s)\tilde{f}(s)|\, ds = \left|\int\limits_a^b f(t)\, dt\right| = |I_2(f)| < \infty.$$

Таким образом, точка $s = s^*$ при сделанных предположениях не является сингулярной для уравнения (2.29), так что любой паре чисел α, β соответствует (взаимно однозначно) решение $\tilde{x}(s)$ уравнения (2.29), удовлетворяющее условиям $\tilde{x}(s^*) = \alpha$, $\tilde{x}'(s^*) = \beta$ (имеется в виду левая производная). Полагая, например, $\alpha = 1$, $\beta = 1\,(-1)$, получим решение $\tilde{x}(s)$ уравнения (2.29) такое, что $\tilde{x}(s) \uparrow 1\,(\downarrow 1)$ при $s \to s^*$; для уравнения (1.2) получаем, следовательно, решение $x(t)$ (очевидно, неминимальное) такое, что $x(t) \uparrow 1\,(\downarrow 1)$ при $t \to b$. Тем самым доказано, что в случае 1 $x_1 \uparrow\downarrow 1$. Отметим еще, что каждое нетривиальное решение (1.2) является строго монотонным вблизи точки b, исключая случай

$$f(t) \equiv 0 \text{ почти всюду на } (t_0, b) \text{ для некоторого } t_0 < b. \tag{2.30}$$

Это утверждение вытекает из знакопостоянства $f(t)$ и неколебательности решений. В самом деле, строгая монотонность $x(t)$ вблизи b эквивалентна строгой монотонности $\tilde{x}(s)$ вблизи s^*; предполагая, без ограничения общности, что $\tilde{x}(s) > 0$ на (s_0, s^*), и учитывая уравнение (2.29), убеждаемся в вогнутости (выпуклости) $\tilde{x}(s)$ на (s_0, s^*) при $f \geqslant 0$ ($\leqslant 0$). Отсюда строгая монотонность $\tilde{x}(s)$ вблизи точки b вытекает очевидным образом, так как возможность $\tilde{x}(s) \equiv \mathrm{const}\,(\neq 0)$ вблизи b исключена вместе с (2.30).

Переходим теперь к случаю $I_1(r) = \infty$ (соответствующему случаям 4 и 5 таблицы 1), который несколько проще. Имеем

$$\int^b y_1(t)y_2(t)|f(t)|\, dt = \int^b |f(t)|\, dt \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} = I_4(r, |f|). \tag{2.31}$$

Поэтому, если функция $f(t)$ (вообще говоря, комплекснозначная) удовлетворяет условию $I_4(r, |f|) < \infty$, то, в силу теоремы 2.1,

$$x_1(t) \sim \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \quad x_2(t) \to 1 \quad (t \to b), \tag{2.32}$$

$$\dot{x}_1(t) \sim \frac{1}{r(t)}, \quad \dot{x}_2(t) r(t) \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \to 0 \quad (t \to b). \tag{2.33}$$

В случае, когда $f(t)$ знакопостоянна и $|I_4(r, f)| = \infty$, теорема 2.2 дает:

а) если $f(t) \geqslant 0$, $I_1 = \infty$, $I_4 = \infty$ и решения (1.2) не колеблются, то

$$x_1(t) \Bigl(\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \Bigr)^{-1} \downarrow 0, \quad x_2(t) \uparrow \infty \quad (t \to b); \tag{2.34}$$

б) если $f(t) \leqslant 0$, $I_1 = \infty$, $I_4 = -\infty$, то

$$x_1(t) \Bigl(\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \Bigr)^{-1} \uparrow \infty, \quad x_2(t) \downarrow 0 \quad (t \to b). \tag{2.35}$$

Ясно, что в обоих случаях $x_1(t) \uparrow \infty$. Соотношения (2.32)— (2.35) можно было бы получить и непосредственным применением лемм 2.1 и 2.2 к уравнению (2.29), получающемуся после замены переменной (2.28), так как в рассматриваемых случаях $s^* = \infty$. Такой способ позволяет также выяснить вопрос о монотонности $x_2(t)$ в случае 4 ($I_1 = \infty$, $|I_4| < \infty$): $x_2 \uparrow 1$, если $f \geqslant 0$, и $x_2 \downarrow 1$, если $f \leqslant 0$, причем монотонность является строгой, за исключением случая (2.30). Это немедленно вытекает из того, что при $f \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) функция $\tilde{x}_2(s)$ стремится к единице (при $s \to \infty$), будучи вогнутой (выпуклой) функцией s.

Итак, теорема 1.1 доказана. Попутно обоснованы также оба утверждения, сформулированные в п. 1.6 предыдущего параграфа, поскольку соотношения (2.25), (2.32) получены без предположения о вещественности $f(t)$.

2.3. Рассмотрим теперь хотя и элементарный, но не слишком очевидный вопрос о связи между сходимостью интегралов $\mathfrak{J}_k$ и $\mathfrak{J}_k^*$, $k = 3, 4$. Здесь также целесообразно перейти к более компактным обозначениям I_k, I_k^*. Нам понадобится следующая

Лемма 2.3. *Пусть абсолютно непрерывные и знакопостоянные на полуинтервале $a \leqslant t < b \leqslant \infty$ функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ таковы, что $\int^b \alpha(t)\dot{\beta}(t)dt$ сходится. Тогда $\int^b \dot{\alpha}(t)\beta(t)dt$ также сходится, если только выполнено одно из следующих условий:*

1) $|\alpha(t)|$ не возрастает;

2) $|\alpha(t)|$ не убывает и $|\beta(t)| \downarrow 0$ при $t \to b$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_a^t \dot{\alpha}(\tau)\beta(\tau)\, d\tau = \alpha(t)\beta(t) - \alpha(a)\beta(a) - \int_a^t \alpha(\tau)\dot{\beta}(\tau)\, d\tau. \tag{2.36}$$

Так как $\dot\alpha(\tau)\beta(\tau)$ не меняет знака, то достаточно доказать ограниченность стоящего в левой части формулы (2.36) интеграла, а для этого, в свою очередь, в силу (2.36), достаточно доказать ограниченность $\alpha(t)\beta(t)$ на $[a,b)$. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $\alpha(t)\neq 0$ на $[a,b)$. Функция $\dfrac{1}{|\alpha(t)|}$ в случае 1) не убывает, а в случае 2) не возрастает. Поэтому ограниченность $\alpha(t)\beta(t)$ в обоих случаях вытекает из второй теоремы о среднем:

$$1)\ \alpha(t)\beta(t)=\alpha(t)\left[\beta(a)+\int\limits_a^t\dot\beta(\tau)d\tau\right]=\alpha(t)\beta(a)+\alpha(t)\int\limits_a^t\frac{1}{\alpha(\tau)}\alpha(\tau)\dot\beta(\tau)d\tau=$$

$$=\alpha(t)\beta(a)+\int\limits_\xi^t\alpha(\tau)\dot\beta(\tau)d\tau\quad(a\leqslant\xi\leqslant t<b);$$

$$2)\ \alpha(t)\beta(t)=-\alpha(t)\int\limits_t^b\dot\beta(\tau)\,d\tau=-\alpha(t)\int\limits_t^b\frac{1}{\alpha(\tau)}\alpha(\tau)\dot\beta(\tau)d\tau=$$

$$=-\int\limits_t^\xi\alpha(\tau)\dot\beta(\tau)d\tau\quad(a\leqslant t<\xi\leqslant b).$$

Лемма доказана.

Теперь легко находим (функция f знакопостоянна):

$$\{I_1<\infty,|I_3|<\infty\}\to|I_3^*|<\infty\ \left(\alpha=\int_t^b\frac{d\tau}{r},\ \beta=\int\limits_a^t fd\tau,\ \text{случай 1)}\right);$$

$$\{I_1<\infty,|I_3^*|<\infty\}\to|I_3|<\infty\ \left(\alpha=\int\limits_a^t fd\tau,\ \beta=\int_t^b\frac{d\tau}{r},\ \text{случай 2)}\right);$$

$$\{I_1=\infty,|I_2|<\infty,|I_4^*|<\infty\}\to|I_4|<\infty$$

$$\left(\alpha=\int\limits_t^b fd\tau,\quad\beta=\int_a^t\frac{d\tau}{r},\quad\text{случай 1)}\right);$$

$$\{I_1=\infty,|I_4|<\infty\}\to\{|I_2|<\infty,|I_4^*|<\infty\}$$

$$\left(\alpha=\int_a^t\frac{d\tau}{r},\quad\beta=\int\limits_t^b fd\tau,\quad\text{случай 2)}\right).$$

В последнем случае сходимость I_2 непосредственно вытекает из условий $|I_4|<\infty$, $\alpha(t)\uparrow\infty$. Установленные связи между сходимостью I_k, I_k^* допускают очевидные переформулировки в терминах расходимости, например, если $I_1=|I_4|=\infty$, то либо $|I_2|=\infty$, либо $|I_2|<\infty$, $|I_4^*|=\infty$ и т.д.

Таким образом, таблица 2 идентична таблице 1, за исключением случая 6A. Чтобы доказать колебательность решений в этом случае, достаточно доказать колебательность решений (1.2) в случае $I_1 = I_2 = \infty$, а это, в свою очередь, эквивалентно колебательности решений (2.29) на $[0, \infty)$ при условии

$$\int^{\infty} \tilde{r}(s)\tilde{f}(s)ds = \int^{b} f(t)dt = I_2 = \infty.$$

Но колебательность решений уравнения $y'' + g(s)y = 0$ на $[0, \infty)$ в случае $\int^{\infty} g(s)\,ds = \infty$ (даже при знакопеременной $g(s)$) хорошо известна (см., например, [5]).

Итак, содержание таблиц 1 и 2 полностью обосновано.

2.4. Из утверждений предыдущего параграфа, за исключением «колебательной» части теоремы 7 из [10] (доказанной в этой же работе), осталось проверить лишь одно (см. п. 1.5): о том, что в случае 3A, $b = \infty$ функции $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, если $p(t)$ ограничена сверху, либо если $p(t)$ ограничена снизу, а $q(t)$ — сверху. Установим несколько более общее предложение.

Теорема 2.3. *Пусть $b = \infty$ и выполнены условия 3A (решения* (1.1) *не колеблются, $q(t) \geqslant 0$, $\mathfrak{J}_1 < \infty$, $\mathfrak{J}_3 = \infty$). Пусть, кроме того, имеет место по крайней мере одно из условий:*

1) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds \leqslant c < \infty$ *для всех t_1, t_2 таких, что $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_1 + 1$;*

2) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds \geqslant c_1 > -\infty \quad (a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_1 + 1)$ *и*

$$\int_{t}^{t+1} q(s)\,ds \leqslant c_2 < \infty \ (t \geqslant a).$$

Тогда не только решения уравнения (1.1)*, но и их первые производные стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — произвольное решение уравнения (1.1); покажем, что $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x(t) > 0$ при больших значениях t, и, следовательно, в соответствии с теоремой 1.1, $x(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$. Функция $u(t) = -\dot{x}(t)$ является поэтому неотрицательной (при больших t) и суммируемой на полуоси $[a, \infty)$:

$$u(t) \geqslant 0 \quad (t \geqslant t_0), \qquad \int^{\infty} u(t)\,dt < \infty. \tag{2.37}$$

Будем доказывать теорему от противного: пусть $u(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$, такие, что $u(t_k) = \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$ (напомним, что $u(t)$ непрерывна и, в силу (2.37), $\liminf u(t) = 0$ при $t \to \infty$). Без ограничения общности можно считать, что $t_{k+1} - t_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Мы получим противоречие с (2.37), если укажем на (t_0, ∞) бесконечную последовательность неналегающих интервалов единичной длины, на которых $u(t)$ равномерно ограничена снизу положительной постоянной; в случае 1) это будут интервалы $(t_k, t_k + 1)$, в случае 2) — интервалы $(t_k - 1, t_k)$ при достаточно больших k.

Действительно, уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\dot{u} = -p(t)u + q(t)x. \tag{2.38}$$

Если выполнено условие 1), то вытекающее из (2.38) неравенство $\dot{u} \geqslant -p(t)u$, в сочетании с соотношением $u(t_k) = \varepsilon$ и известной теоремой сравнения С. А. Чаплыгина [23] (см. также [7]), приводит к оценке

$$u(t) \geqslant \varepsilon \exp\left(-\int\limits_{t_k}^{t} p(s)\,ds\right) \geqslant \varepsilon e^{-c} \quad (t_k \leqslant t \leqslant t_k + 1).$$

Случай 2) немногим сложнее. Решая (2.38) как линейное уравнение относительно $u(t)$ и учитывая, что $u(t_k) = \varepsilon$, получаем

$$u(t) = \left[\varepsilon - \int\limits_{t}^{t_k} q(\tau)x(\tau)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t_k} p(s)\,ds\right)d\tau\right]\exp\left(\int\limits_{t}^{t_k} p(s)\,ds\right). \tag{2.39}$$

Первое из соотношений 2) показывает, что

$$\exp\left(\int\limits_{t}^{t_k} p(s)\,ds\right) \geqslant e^{c_1}, \quad \exp\left(-\int\limits_{t}^{t_k} p(s)\,ds\right) \leqslant e^{-c_1}\ (t_k - 1 \leqslant t \leqslant t_k). \tag{2.40}$$

Пусть k столь велико, что

$$x(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2c_2}e^{c_1} \quad (t \geqslant t_k - 1).$$

Тогда, учитывая вторые из неравенств (2.40), находим

$$\int\limits_{t}^{t_k} q(\tau)x(\tau)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t_k} p(s)\,ds\right)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2c_2}\int\limits_{t_k-1}^{t_k} q(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (t_k - 1 \leqslant t \leqslant t_k). \tag{2.41}$$

Соотношения (2.39), (2.41) вместе с первым неравенством (2.40) приводят (для достаточно больших k) к оценке

$$u(t) \geqslant \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right)e^{c_1} = \frac{\varepsilon}{2}e^{c_1} \quad (t_k - 1 \leqslant t \leqslant t_k).$$

Теорема доказана.

§ 3. Дополнения и приложения

В этом параграфе будут получены некоторые асимптотические оценки решений и рассмотрены приложения полученных результатов к вопросам колебательности; мы коснемся также вопроса о переходе от уравнений вида $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ к уравнениям $\ddot{y} + fy = 0$.

3.1. Выше было показано, что в случаях 1, 2, 4 асимптотическое поведение $x_1(t)$, $x_2(t)$ при $t \to b$ вполне определяется (с точностью до множителя $1 + o(1)$) с помощью нескольких квадратур. В остальных случаях мы не располагаем столь эффективными средствами; однако оценки для скорости роста или убывания решений могут быть получены без особого труда. Приведем здесь две оценки такого рода: оценку сверху $|x(t)|$ в случае 3 и оценку снизу $|x(t)|$ в случае 5 таблицы 2 (ясно, что первая оценка относится по существу к x_1, а вторая — к x_2).

По–прежнему пользуемся записью уравнения в форме (1.2):

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right] + f(t)x = 0 \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty).$$

Функцию $f(t)$ предполагаем теперь вещественной (вообще говоря, знакопеременной); в остальном предположения о коэффициентах прежние.

Теорема 3.1. *Пусть решения* (1.2) *не колеблются на* $[a, b)$. *Тогда*

а) если $I_1(r) < \infty$, *то для каждого решения* $x(t)$ *уравнения* (1.2) *справедлива оценка*

$$|x(t)| \leqslant c \exp\left(-\int^{t} \frac{d\tau}{r(\tau)} \int^{\tau} f(s)\,ds\right) \quad (a \leqslant t < b); \tag{3.1}$$

б) если $I_1(r) = \infty$ *и* $I_2(f)$ *сходится (вообще говоря, неабсолютно), то для каждого нетривиального решения* $x(t)$ *уравнения* (1.2) *при* t, *достаточно близких к* b, *справедлива оценка*

$$|x(t)| \geqslant c \exp\left(\int^{t} \frac{d\tau}{r(\tau)} \int_{\tau}^{b} f(s)\,ds\right) \quad (t_0 \leqslant t < b; c > 0). \tag{3.2}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $x(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t < b$. Положим $v = \dfrac{r\dot{x}}{x}$ или, что то же самое,

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{v(\tau)}{r(\tau)}\, d\tau\right) \quad (t_0 \leqslant t < b). \tag{3.3}$$

Легко проверить, что функция $v(t)$ абсолютно непрерывна при $t_0 \leqslant t < b$ и удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = -\frac{1}{r(t)} v^2 - f(t) \quad (t_0 \leqslant t < b), \tag{3.4}$$

откуда следует, что

$$\dot{v} \leqslant -f(t) \quad (t_0 \leqslant t < b). \tag{3.5}$$

Интегрируя это неравенство от t_0 до t, получаем

$$v(t) \leqslant c_1 - \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, ds \quad (t_0 \leqslant t < b). \tag{3.6}$$

Теперь утверждение а) вытекает из сопоставления формул (3.3) и (3.6); в силу условия $I_1 < \infty$ наличие постоянной c_1 в (3.6) влияет лишь на значение мультипликативной постоянной c в (3.1).

Для доказательства утверждения б) следует проинтегрировать неравенство (3.5) от t_0 до b, воспользовавшись сходимостью I_2 и соотношением

$$v(t) \to 0 \text{ при } t \to b, \tag{3.7}$$

которое будет доказано ниже. После интегрирования получаем неравенство

$$v(t) \geqslant \int\limits_{t}^{b} f(s)\, ds \quad (t_0 \leqslant t < b),$$

сопоставление которого с (3.3) приводит к оценке (3.2).

Докажем теперь (3.7). Интегрируя уравнение (3.4) от $t_1\,(\geqslant t_0)$ до t, получим

$$v(t) = v(t_1) - \int\limits_{t_1}^{t} f(s)\, ds - \omega(t) \quad (t_1 \leqslant t < b), \tag{3.8}$$

где

$$\omega(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \frac{v^2(s)}{r(s)}\, ds.$$

Будучи неубывающей функцией, $\omega(t)$ при $t \to b$ стремится к конечному пределу или к бесконечности; поэтому, в силу (3.8) и сходимости I_2,

$$v(t) \to \xi \text{ при } t \to b \quad (-\infty \leqslant \xi < \infty). \tag{3.9}$$

Соотношение (3.7) будет доказано, если убедимся, что случаи $\xi = \mathrm{const} \neq 0$ и $\xi = -\infty$ невозможны.

Пусть ξ — число, отличное от нуля. Тогда, в силу (3.8), $\omega(t)$ имеет конечный предел при $t \to b$; с другой стороны, учитывая (3.9) и условие $I_1 = \infty$, получаем

$$\omega(t) \sim \xi^2 \int^t \frac{ds}{r(s)} \to \infty \quad (t \to b).$$

Пусть теперь $\xi = -\infty$. Если t_1 достаточно близко к b, то, в силу (3.8),

$$v(t) \leqslant -\omega(t), \text{ т.е. } v^2(t) \geqslant \omega^2(t) \quad (t_1 \leqslant t < b). \tag{3.10}$$

Так как $v(t) \to -\infty$, то, ввиду (3.8), получим, что $\omega(t) \to \infty$ при $t \to b$; поэтому

$$\frac{1}{\omega(t)} \to 0 \quad (t \to b).$$

С другой стороны, учитывая (3.10) и условие $I_1 = \infty$, находим

$$\frac{1}{\omega(t)} = c - \int^t \frac{\dot\omega(s)}{\omega^2(s)}\, ds = c - \int^t \frac{v^2(s) ds}{\omega^2(s) r(s)} \leqslant c - \int^t \frac{ds}{r(s)} \to -\infty \quad (t \to b).$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.1.

Оценки (3.1), (3.2) показывают, что некоторые из утверждений таблицы 2 частично переносятся на случай знакопеременной функции $f(t)$ (в записи (1.1) — функции $q(t)$). Так, если решения уравнения (1.2) не колеблются, $I_1(r) < \infty$ и

$$\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \int^\tau f(s)\, ds \geqslant c_0 > -\infty \quad (a \leqslant t < b), \tag{3.11}$$

то решения (1.2) ограничены на $[a, b)$; условие (3.11), в частности, выполняется, если сходится $I_3^*(r, f)$. Отметим, что в отличие от случая $f \geqslant 0$ сходимость $I_3^*(r, f)$ сама по себе не обеспечивает неколебательности (используя результат работы [24], можно показать, что неколебательность обеспечивается сходимостью $I_3(r, f)$, но для знакопеременной f условия сходимости I_3 и I_3^* не совпадают). Далее, если решения не колеблются, $I_2(f)$ сходится и $I_1(r) = I_4^*(r, f) = \infty$, то $x_1(t) \to \infty$, $x_2(t) \to \infty$ $(t \to b)$. Эти обобщения, разумеется, отличаются от тех, которые встречались в предыдущих параграфах, так как здесь речь идет лишь об условной сходимости интегралов (и в предположении вещественности функции $f(t)$).

Оценка (3.2) для $r(t) \equiv 1$, $b = \infty$ неявно содержится в работе И. М. Соболя [9], который заметил также, что она может быть использована для получения признака колебательности. Докажем следующее, более общее предложение.

Следствие 3.1. *Решения уравнения* (1.2) *колеблются на* $[a, b)$ *в любом из следующих случаев:*

а) $I_1(r) < \infty$ *и*

$$\int^b \frac{1}{r(t)} \exp\left(2\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \int^\tau f(s)\,ds\right) dt = \infty; \tag{3.12}$$

б) $I_1(r) = \infty$, $I_2(f)$ *сходится и*

$$\int^b \frac{1}{r(t)} \exp\left(-2\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \int_\tau^b f(s)\,ds\right) dt < \infty. \tag{3.13}$$

Доказательство легко получается от противного, если заметить, что оценка (3.1) должна выполняться, в частности, для неминимального решения $x_1(t)$, а оценка (3.2) — для минимального решения $x_2(t)$. В самом деле, пусть решения (1.2) не колеблются. Если выполнены условия а), то имеет место оценка (3.1), которую для краткости запишем в виде $x_1(t) \leqslant \varphi(t)$. Отсюда

$$\int^b \frac{dt}{r\varphi^2} \leqslant \int^b \frac{dt}{rx_1^2} < \infty$$

(так как x_1 неминимально), что противоречит условию (3.12). Аналогично, если выполнены условия б), то для x_2 имеем оценку (3.2): $x_2(t) \geqslant \psi(t)$ $(t \geqslant t_0)$. Отсюда

$$\int^b \frac{dt}{r\psi^2} \geqslant \int^b \frac{dt}{rx_2^2} = \infty$$

(так как x_2 минимально), что противоречит условию (3.13).

Итак, утверждения а) и б) доказаны. Второе из них было получено в [9] (для $r(t) \equiv 1$, $b = \infty$; впрочем, здесь это не влияет на доказательство).

3.2. Рассмотрим вопрос о том, как влияет на неколебательность решений увеличение или уменьшение $p(t)$ (соответствующие формулировки для $b = \infty$ приводились в [8]). Пусть, наряду с (1.1),

$$Lx \equiv \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty),$$

дано еще одно уравнение:

$$L_1 y \equiv \ddot{y} + p_1(t)\dot{y} + q_1(t)y = 0 \quad (a \leqslant t < b). \tag{3.14}$$

Как показывает теорема Штурма, колебательность решений «монотонно возрастает» с ростом «коэффициента упругости» $q(t)$: если $p_1(t) \equiv p(t)$, $q_1(t) \leqslant q(t)$ и решения (1.1) не колеблются, то и решения (3.14) не колеблются. Влияние изменения «коэффициента трения» $p(t)$ не столь просто и заведомо не «монотонно», как показывают простейшие уравнения с постоянными коэффициентами. Докажем следующее предложение.

Теорема 3.2. *Пусть $q(t) \geqslant 0$, $q_1(t) \leqslant q(t)$. Для неколебательности решений уравнения* (3.14) *достаточно выполнения одного из следующих условий* $(t_0 \leqslant t < b)$:

а) решения (1.1) *не колеблются, $I_1(p) < \infty$ и $p_1(t) \geqslant p(t)$;*

б) решения (1.1) *не колеблются, $I_1(p) = \infty$ и $p_1(t) \leqslant p(t)$;*

в) $I_1(p) < \infty$, $I_2(p, q) < \infty$ и $p_1(t)$ сравнимо с $p(t)$ (т. е. либо $p_1 \geqslant p$, либо $p_1 \leqslant p$).

Доказательство основано на тех сведениях о монотонности решений, которые доставляет теорема 1.1, в сочетании с известным критерием неколебательности Валле-Пуссена [1] (см. также [7]): решения уравнения (3.14) не колеблются на $[a, b)$ в том и только в том случае, если существует $x(t) > 0$ такая, что $L_1 x \leqslant 0$ ($t_0 \leqslant t < b$; $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывна при $t < b$). Действительно, в условиях а) для уравнения (1.1) имеет место один из случаев 1A, 2A, 3A; следовательно, существует решение $x(t)$ этого уравнения, положительное и убывающее вблизи точки b. Отсюда

$$L_1 x = L_1 x - Lx = [p_1(t) - p(t)]\dot{x} + [q_1(t) - q(t)]x \leqslant 0 \quad (t_0 \leqslant t < b), \tag{3.15}$$

поскольку $p_1 \geqslant p$, $q_1 \leqslant q$. Тем самым условие а) доказано. Аналогично, в условиях б) для (1.1) имеет место один из случаев 4A, 5A и, следовательно, существует решение $x(t)$, положительное и возрастающее вблизи b. Это опять приводит к неравенству (3.15), так как теперь $p_1 \leqslant p$. Наконец, условия в) показывают, что в этом случае мы имеем дело с 1A, т. е. уравнение (1.1) обладает и положительными возрастающими, и положительными убывающими (вблизи точки b) решениями. При $p_1 \leqslant p$ ($p_1 \geqslant p$) в качестве $x(t)$ выбираем решение уравнения (1.1), положительное и возрастающее (убывающее) вблизи точки b, после чего снова приходим к неравенству (3.15). Теорема доказана.

Ясно, что эти же утверждения могут быть сформулированы и как признаки колебательности. Например: *решения* (1.1) *колеблются, если колеблются решения* (3.14) *и при этом $I_1(p) < \infty$, $q(t) \geqslant 0$, $p(t) \leqslant p_1(t)$,* $q(t) \geqslant q_1(t)$ (что, очевидно, эквивалентно а)) и т. п.

Отметим, что утверждение в) сохраняется и для знакопеременной $q(t)$, если условие $I_2(p,q) < \infty$ заменить условием $I_2(p,|q|) < \infty$. Действительно, из доказательства, проведенного в § 2, нетрудно усмотреть, что и при этих предположениях уравнение (1.1) обладает возрастающими и убывающими положительными решениями; единственное изменение заключается в том, что некоторые решения (1.1) в этом случае могут быть немонотонными (именно, те, для которых $\beta = \tilde{x}'(s^*)$, см. § 2), но здесь это не имеет значения.

Следует подчеркнуть, что в отличие от теорем штурмовского типа полученные выше теоремы сравнения носят чисто асимптотический характер. Например, утверждение «если $I_1(p) = \infty$, $p(t) \geqslant p_1(t)$, $q(t) \geqslant q_1(t)$, $q(t) \geqslant 0$, то между двумя нулями нетривиального решения (3.14) лежит по крайней мере один нуль любого решения (1.1)» было бы заведомо неверным: можно лишь утверждать, что при этих условиях колебательность решений уравнения (3.14) влечет за собой колебательность решений (1.1). Отметим, что теоремы штурмовского типа можно легко получить с помощью подстановки

$$x(t) = u(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int^{t} p(\tau)\,d\tau\right), \quad y(t) = v(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int^{t} p_1(\tau)\,d\tau\right),$$

если в качестве предпосылок использовать неравенства, связывающие не только $p(t)$, $p_1(t)$, но и $\dot{p}(t)$, $\dot{p}_1(t)$; в настоящей работе мы избегаем требований, связанных с гладкостью коэффициентов.

Приведем два результата, иллюстрирующих применение теоремы 3.2.

Следствие 3.2. *Пусть $p_1(t) \geqslant p(t)$, $0 \leqslant q_1(t) \leqslant q(t)$. Если решения* (1.1) *не колеблются и ограничены на $[a,b)$, то это же верно и для решений* (3.14).

Сформулированное предложение, само по себе отнюдь не очевидное, легко получается «сцеплением» вышеизложенных фактов. В самом деле, теорема 1.1 показывает, что для уравнения (1.1) имеет место один из случаев 1A, 2A, 3A, т. е. $I_1(p) < \infty$. В силу утверждения а) теоремы 3.2 заключаем, что решения (3.14) не колеблются. Далее, из неравенств $I_1(p) < \infty$, $p_1(t) \geqslant p(t)$ вытекает, что $I_1(p_1) < \infty$; для уравнения (3.14), следовательно, также имеет место один из случаев 1A, 2A, 3A, что доказывает ограниченность решений.

Второй из упомянутых результатов относится к семейству вещественных уравнений, зависящих от параметра,

$$\ddot{x} + p(t,\omega)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty, -\infty < \omega < \infty). \tag{3.16}$$

Пусть $q(t) \geqslant 0$ и $p(t,\omega)$ не убывает по ω (например, $p(t,\omega) = \omega p_1(t) + p_2(t)$, $p_1(t) \geqslant 0$). Через Ω обозначим множество тех значений ω, при которых решения уравнения (3.16) колеблются на $[a, b)$. Если, например, $p(t, \omega) \equiv \omega$, $q(t) \equiv \text{const} > 0$, то Ω, очевидно, представляет собой интервал $(-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q})$. Оказывается, что примерно аналогичная ситуация имеет место и в общем случае.

Обозначим через ω_0 infimum значений ω, для которых $I_1[p(t, \omega)] < \infty$ (если таких значений нет, полагаем $\omega_0 = \infty$, если же $I_1[p(t, \omega)] < \infty$ при всех ω, то, естественно, полагаем $\omega_0 = -\infty$).

Следствие 3.3. *При сделанных предположениях множество Ω связно. Кроме того, если Ω непусто и ω_0 конечно, то $\omega_0 \in \bar{\Omega}$.*

Доказательство. Возможны четыре случая:

$$\omega_0 = -\infty, \tag{3.17}$$

$$\omega_0 = \infty, \tag{3.18}$$

$$\omega_0 \quad \text{конечно,} \ I_1[p(t, \omega_0)] < \infty, \tag{3.19}$$

$$\omega_0 \quad \text{конечно,} \ I_1[p(t, \omega_0)] = \infty. \tag{3.20}$$

Из соображений монотонности ясно, что $I_1[p(t, \omega)] = \infty$ при всех $\omega < \omega_0$ и $I_1[p(t, \omega)] < \infty$ при всех $\omega > \omega_0$. Отсюда, учитывая утверждения а), б) теоремы 3.2, легко получить следующие свойства характеристической функции $\chi(\omega)$ множества Ω:

в случае (3.17) $\chi(\omega)$ не возрастает на $(-\infty, \infty)$;
в случае (3.18) $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \infty)$;
в случае (3.19) $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \omega_0)$ и не возрастает на $[\omega_0, \infty)$;
в случае (3.20) $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \omega_0]$ и не возрастает на (ω_0, ∞).

Покажем, например, что в случае (3.20) функция $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \omega_0]$, т. е. что соотношения $\omega_1 < \omega_2 \leqslant \omega_0$, $\chi(\omega_2) = 0$ влекут за собой (при условии (3.20)) соотношение $\chi(\omega_1) = 0$. Действительно, так как $I_1[p(t, \omega_2)] = \infty$, $p(t, \omega_1) \leqslant p(t, \omega_2)$, то неколебательность решений (3.16) при $\omega = \omega_1$ вытекает (в силу утверждения б) теоремы 3.2) из неколебательности при $\omega = \omega_2$. Аналогично проверяются и остальные утверждения о монотонности $\chi(\omega)$. Следствие 3.3 вытекает из этих утверждений.

Итак, Ω представляет собой промежуток в широком смысле слова (этот промежуток может быть пустым, может представлять собой одну точку или всю числовую прямую, может быть конечным, полубесконечным, открытым, замкнутым, полуоткрытым). В случаях (3.17), (3.18) Ω либо пусто, либо полубесконечно, либо заполняет всю прямую $(-\infty, \infty)$; в случаях же (3.19), (3.20), по-видимому, возможны все перечисленные выше возможности.

Некоторые из возможностей иллюстрируются следующим простым примером. Пусть $p(t, \omega) \equiv \omega$, $q(t) = t^k$, $a > 0$, $b = \infty$. Очевидно, $\omega_0 = 0$. Множество Ω пусто при $k < -2$, состоит из единственной точки $\omega = 0$ при

$-2 \leqslant k < 0$, представляет собой интервал $(-2, 2)$ при $k = 0$ и, наконец, заполняет всю числовую прямую при $k > 0$. Все это легко усмотреть с помощью замены $x(t) = y(t)e^{-\omega t/2}$.

Следствие 3.3 показывает, что неколебательность при ω_1, ω_2 таких, что $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, влечет за собой неколебательность при всех ω, лежащих вне интервала (ω_1, ω_2). Окрестность точки ω_0 является, таким образом, «местом наибольшей колебательности» (в логическом смысле): если решения уравнения (3.16) не колеблются при всех ω, лежащих в некоторой окрестности ω_0, то они не колеблются при любом ω из $(-\infty, \infty)$. Отметим, что значение ω_0 не зависит от $q(t)$ и нахождение его обычно не представляет труда. Было бы интересно выяснить, не является ли сама точка ω_0 (если ω_0 конечно) «точкой наибольшей колебательности», т. е. не вытекает ли из неколебательности (3.16) при $\omega = \omega_0$ неколебательность этого уравнения при всех ω. Иначе говоря, нельзя ли в формулировке следствия 3.3 заменить $\bar{\Omega}$ на Ω? Ряд конкретных примеров подтверждает это предположение, но в общем случае вопрос остается открытым.

3.3. В заключение мы обсудим методический вопрос о переходе от уравнения $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ к уравнению $\ddot{y} + fy = 0$. Такой переход может быть осуществлен элементарными аналитическими преобразованиями, из которых следующие два хорошо известны (см., например, [18, 19]):

1) *замена функции* $x(t) = y(t)\exp\Big(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int^t p(\tau)\,d\tau\Big)$ *переводит уравнение* $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ *в уравнение* $\ddot{y} + \Big(q - \dfrac{1}{2}\dot{p} - \dfrac{1}{4}p^2\Big)y = 0$*;*

2) *замена переменной* $s = \displaystyle\int^t \exp\Big(-\int^u p(\tau)\,d\tau\Big)$ *переводит уравнение* $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ $\Big($*после умножения на* $\exp\Big(2\displaystyle\int^t p(\tau)\,d\tau\Big)\Big)$ *в уравнение* $\dfrac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + q_1(s)\tilde{x} = 0$*, где* $\tilde{x}(s) = x[t(s)]$, $q_1(s) = q(t)\exp\Big(2\displaystyle\int^t p(\tau)\,d\tau\Big)$, $t = t(s)$.

Ввиду возможности исключения члена, содержащего $\dot{x}$, часто высказывается мысль о том, что «полное» уравнение $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ вообще не нуждается в изучении (см., например, [25], стр. 158—159). С этим трудно согласиться, поскольку известен ряд предложений, существенно использующих наличие диссипативного члена $p(t)\dot{x}$ и не имеющих прямых аналогов для случая $p(t) \equiv 0$; попытки доказать эти утверждения с помощью перехода к «укороченному» уравнению $\ddot{y} + fy = 0$ не упрощают, а лишь усложняют задачу. Примерами могут служить теоремы 4—7 работы [10], последняя из которых упоминалась выше. Все же обычно переход к укороченному уравнению целесообразен; при этом возникает вопрос о выборе наиболее удачного преобразования. Недостатком преобразования 1) является требование абсолютной непрерывности функции $p(t)$, не отвечающее существу дела. От этого недостатка свободно преобразование 2), которое, тем не менее, применяется значительно реже, чем преобразование 1) (так, в [25, 26] упоминается лишь 1)). Это объясняется следующим. Во-первых, если $I_1(p) < \infty$, то при 2) полуось $t \geqslant t_0$ отображается не на полуось, а на конечный полуинтервал; во-вторых, в весьма важном случае ω-периодических коэффициентов p, q преобразование 2), в отличие от 1), не обеспечивает периодичности нового коэффициента q_1.

В связи со сказанным, для периодического случая предлагается следующее комбинированное преобразование. Пусть $p(t)$, $q(t)$ — ω–периодические суммируемые функции, причем $p(t)$ вещественна. Положим $\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int\limits_0^\omega p(t)\,dt = k$.

3) *Замена функции* $y(t) = e^{kt}x(t)$ *и замена переменной* $s = s(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \exp\left(2ku - \int\limits_0^u p(\tau)\,d\tau\right)du$ *переводят уравнение* $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ *в уравнение* $\dfrac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + q_1(s)\tilde{y} = 0$*, где* $\tilde{y}(s) = y[t(s)]$,

$q_1(s) = [q(t) - kp(t) + k^2]\exp\left(2\displaystyle\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau - 4kt\right)$*,* $t = t(s)$*.*

Очевидно, $q_1(s)$ ω_1–периодична, причем

$$\omega_1 = \int\limits_0^\omega \exp\left(2kt - \int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau\right)dt.$$

Преобразование 3) (ранее, по-видимому, не отмечавшееся) свободно от недостатков преобразований 1) и 2): оно переводит полуось в полуось, сохраняет периодичность коэффициентов и не требует никакой гладкости функции $p(t)$. Поэтому при общих рассмотрениях, связанных с вещественным периодическим случаем, оно является более предпочтительным. В связи с этим можно упомянуть, например, работу В. А. Якубовича [27], где устанавливаются тонкие оценки характеристических показателей для уравнения $\ddot{x} + fx = 0$, $f(t+\omega) \equiv f(t)$; с помощью преобразования 1) эти результаты распространяются затем на уравнение $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$, $p(t + \omega) \equiv p(t)$, $q(t+\omega) \equiv q(t)$ в предположении абсолютной непрерывности $p(t)$. Применение здесь преобразования 3) вместо преобразования 1) позволяет избавиться от этого ограничения.

Литература

1. *de la Vallée Poussin, C.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n / C. de la Vallée Poussin // *J. Math. Pures et Appl. (9)*. — 1929. — Vol. 8. — P. 125—144.
2. *Hille, E.* Non-oscillation theorems / E. Hille // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1948. — Vol. 64, no. 2. — P. 234—258.
3. *Соболь, И. М.* Об уравнениях Риккати и приводимых к ним линейных уравнениях второго порядка / И. М. Соболь // *ДАН СССР*. — 1949. — Т. 65, № 3. — С. 275—278.
4. *Кондратьев, В. А.* Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ / В. А. Кондратьев // *ДАН СССР*. — 1957. — Т. 113, № 4. — С. 742—745.
5. *Ráb, M.* Kriterien für die Oszillation der Losungen der Differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)y = 0$ / M. Ráb // *Časop. pro pěst, matem.* — 1959. — Vol. 84. — P. 335—370.
6. *Ельшин, М. И.* Об одном решении классической проблемы колебаний / М. И. Ельшин // *ДАН СССР*. — 1962. — Т. 147, № 5. — С. 1013—1016.
7. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. — М.: Физматгиз, 1963. — 248 с.
8. *Левин, А. Ю.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 153, № 6. — С. 1257—1260.
9. *Соболь, И. М.* Граничное решение уравнения Риккати и его применение к исследованию решений линейного дифференциального уравнения второго порядка / И. М. Соболь // *Уч. записки Моск. гос. ун-та. (Математика. Том V.)* — 1952. — Вып. 155. — С. 195—205.
10. *Левин, А. Ю.* Об устойчивости решений уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1961. — Т. 141, № 6. — С. 1298—1301.
11. *Левин, А. Ю.* Классификация неколебательных случаев для уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ со знакопостоянной $q(t)$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1966. — Т. 171, № 5. — С. 1037—1040.
12. *Mařik, I.* Nichtoszillatorische lineare Differentialgleichungen 2 Ordnung / I. Mařik, M. Ráb // *Чех. матем. журн.* — 1963. — Vol. 13. — P. 209—225.
13. *Opial, Z.* Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation differentielle $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$ / Z. Opial // *Ann. polon. math.* — 1959. — Vol. 6, no. 2. — P. 181—200.
14. *Gheorghiu, N.* Sur le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre / N. Gheorghiu // *Anal. Univ. Cuza, Iaşi*. — 1961. — Vol. 7, no. 1. — P. 77—84.
15. *Wintner, A.* Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hy-

perbolic range / A. Wintner // *Duke Math. J.* — 1948. — Vol. 15, no. 1. — P. 55—67.

16. *Halanay, A.* Comportarea asimptotică a soluţiilor ecuaţiilor de ordinul al doilea de tip neoscilator / A. Halanay // *Comunicările Acad. Rep. pop. Romîne.* — 1959. — Vol. 9, no. 11. — P. 1121—1128.
17. *Haupt, O.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser lincarer gewöhnlicher Differentialgleichungen / O. Haupt // *Math. Z.* — 1942. — Vol. 48. — P. 289—292.
18. *Беллман, Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. — М.: ИЛ, 1954. — 215 с.
19. *Коддингтон, Э. А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. — М.: ИЛ, 1958. — 475 с.
20. *Richard, U.* Serie asintotiche per una classe di equazioni differenziali lineari non oscillanti del 2° ordine / U. Richard // *Rend. Sem. mat. Univ. e Politecn. Torino.* — 1963/1964. — Vol. 23. — P. 171—217.
21. *Ráb, M.* Les développements asymptotiques des solutions de l'équation $(py')' + qy = 0$ / M. Ráb // *Arch. math. (Brno).* — 1966. — Vol. 2. — P. 1—17.
22. *Гермейер, Ю. Б.* О приближенных представлениях решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Ю. Б. Гермейер, Д. С. Иргер // *ДАН СССР.* — 1953. — Т. 93, № 6. — С. 961—964.
23. *Чаплыгин, С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 102 с.
24. *Левин, А. Ю.* Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1965. — Т. 20, № 2 (122). — С. 244—246.
25. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Физматгиз, 1961. — 589 с.
26. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — 477 с.
27. *Якубович, В. А.* Оценка характеристических показателей и критерии устойчивости для линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами / В. А. Якубович // *ДАН СССР.* — 1952. — Т. 87, № 3. — С. 345—348.

6. Неосцилляция решений уравнения [7] $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$

В статье дается обзор связей неосцилляции с другими свойствами решений и характеризуются известные признаки неосцилляции. Устанавливаются новые результаты в этом направлении.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Обсуждение проблематики, связанной с неосцилляцией

1.1. В настоящей работе изучается поведение решений уравнения

$$
\begin{gathered}
Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0 \\
(-\infty \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant \infty)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

с вещественными коэффициентами, локально суммируемыми внутри (α, β). В первую очередь нас будет интересовать неосцилляция, а также смежные вопросы распределения нулей и роста решений. Как известно, промежуток $J \subset (\alpha, \beta)$ называется промежутком неосцилляции для оператора L, если каждое нетривиальное решение уравнения (1.1) имеет в J не более $n - 1$ нуля (с учетом кратности). Здесь возникают две основные проблемы: 1) изучение следствий неосцилляции и 2) отыскание эффективных способов проверки неосцилляции. Разработка этого круга вопросов восходит к классическим работам Штурма и была продолжена в весьма многочисленных позднейших исследованиях. В разное время (и в разной степени) интересующей нас проблематике уделяли внимание П. Л. Чебышёв, Н. Е. Жуковский, Г. Пойа, Г. Маммана, Ш. Валле-Пуссен, С. А. Чаплыгин, С. Н. Бернштейн, М. Г. Крейн, Я. Микусинский, Ф. Хартман, А. Винтнер, Н. В. Азбелев, О. Арамэ, В. А. Кондратьев, Р. Беллман, а также многие другие. Некоторые из относящихся сюда работ на первый взгляд не имеют между собой

[7] Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // УМН. — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43—96.

почти ничего общего, однако при более близком рассмотрении выясняется, что целый комплекс внешне разнообразных вопросов — дифференциальные неравенства, представление L в виде произведения n вещественных операторов первого порядка, разрешимость интерполяционных краевых задач, вопросы перемежаемости нулей, ляпуновские зоны устойчивости для уравнения Хилла, свойства чебышёвских и декартовых систем функций, осцилляционность (по Гантмахеру—Крейну) функций Грина краевых задач, теоремы о среднем значении и т. п., — все это самым тесным образом связано с вопросом о неосцилляции, который в силу этого занимает одно из центральных мест в качественной теории вещественного уравнения (1.1). Мы постараемся пояснить это в пункте 1.2 настоящего параграфа, где дается обзор основных следствий неосцилляции, обнаруженных различными авторами. Далее, в 1.3 характеризуются предложенные до настоящего времени способы проверки неосцилляции. Дальнейшие литературные указания содержатся в § 2—§ 5, которые в значительной части посвящены новым результатам. Остановимся вкратце на этой стороне работы.

В § 2, предполагая, что (α, β) есть промежуток неосцилляции для L, мы изучаем поведение решений уравнения (1.1) вблизи концов α, β. Показывается, что решения можно упорядочить по скорости роста при $t \uparrow \beta$ (или $t \downarrow \alpha$), причем эта «иерархия» распространяется и на всевозможные вронскианы, составленные из решений (теорема 2.1). Здесь же вводятся так называемые *обобщенные нули*, т. е. каждому решению $x(t)$ уравнения (1.1) приписываются в точках α, β нули соответствующей кратности, в зависимости от того, какова скорость роста $x(t)$ при $t \downarrow \alpha$ и $t \uparrow \beta$ по сравнению со скоростью роста других решений. Этот полезный прием позволяет включить ряд вопросов, связанных с асимптотикой решений, в теорию распределения нулей, причем последняя заметно упрощается (см. теорему 3.1), как это обычно бывает при корректном введении «несобственных» элементов.

Вопросам распределения нулей посвящены лемма 2.3 и § 3. Основной упор сделан здесь на обобщенные нули, хотя и для обычных нулей соответствующие факты ранее, по-видимому, обстоятельно не излагались (отдельные из них, впрочем, в этом случае тривиальны).

В § 4 дается следующий критерий неосцилляции (теорема 4.1): *отрезок $[a, b]$ является промежутком неосцилляции для L в том и только том случае, если существует такая система функций $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_{n-1}(t)$, что: 1) на $[a, b)$ положительны вронскианы всех подсистем вида $z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{n-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ или $z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1}$ $(1 \leqslant k < l \leqslant n-1)$; 2) $(-1)^{n-k} L z_k \geqslant 0$ в (a, b) $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.* Для $n = 2$ соответствующий простой результат был получен еще Валле-Пуссеном (см. 4.3). Различные конкретизации системы $\{z_i\}$ приводят как к улучшениям и обобщениям ранее известных признаков неосцилляции, так и к признакам нового типа, из которых упомянем здесь один: *если корни*

$\lambda_i(t)$ уравнения

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t) = 0 \tag{1.2}$$

при всех $t \in (-\infty, \infty)$ вещественны и разделены постоянными, то $(-\infty, \infty)$ есть промежуток неосцилляции для L.

§ 5 посвящен применению установленных в § 2—§ 4 результатов для получения асимптотических оценок решений. Приведем здесь следствие теоремы 5.1, также связанное с корнями уравнения (1.2): *если при всех достаточно больших t*

$$\nu_0 \leqslant \lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \leqslant \nu_n,$$

где ν_i — некоторые постоянные ($\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_n$), то уравнение (1.1) обладает фундаментальной системой решений $\{x_i\}$ такой, что

$$c_i e^{\nu_{i-1}t} \leqslant x_i(t) \leqslant d_i e^{\nu_i t} \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ \ (c_i,\, d_i > 0;\, t \geqslant t_0).$$

Этот результат близок так называемым «теоремам о замораживании», но отличается от последних своим точным характером.

Как будет видно из дальнейшего, при исследовании очерченного круга вопросов особую роль играет специфическая «вронскианная» техника (существенным элементом которой является, в частности, лемма 2.6).

Основные результаты § 2—§ 5 посвящены операторам L общего вида: мы не уделяем особого внимания двучленным уравнениям $x^{(n)} + q(t)x = 0$, а также избегаем каких-либо иных специальных предположений — о знаках коэффициентов $p_i(t)$ и т. п. (это не относится к частным следствиям основных теорем). В то время как § 1 занимает несколько обособленное положение, § 2—§ 5 тесно связаны: каждый из последующих параграфов опирается на предшествующие.

Автор признателен М. А. Красносельскому и В. А. Кондратьеву, которые прочли статью в рукописи и своими замечаниями способствовали ее улучшению.

1.2. Рассмотрим основные следствия неосцилляции и ее связи с различными аспектами качественной теории уравнения (1.1). Через T_0J ниже обозначается класс операторов L, для которых J есть промежуток неосцилляции, а через $\varphi_u J$ — число нулей с учетом кратности функции $u(t)$ на промежутке J (подробный список терминов и обозначений будет дан в конце этого параграфа).

Соотношение $L \in T_0(\alpha, \beta)$ необходимо и достаточно для возможности разложения Пойа—Маммана

$$L = h_n \frac{d}{dt} h_{n-1} \frac{d}{dt} \ldots h_1 \frac{d}{dt} h_0 \ \ (\alpha < t < \beta) \tag{1.3}$$

(операции производятся справа налево), *где вещественные функции* $h_i(t)$ *отличны от нуля и обладают достаточной гладкостью в* (α, β). Это утверждение (в несколько меньшей общности, см. пункт 2.4) установил Г. Пойа в основополагающей заметке [1], которая будет часто упоминаться в дальнейшем (см. также Г. Маммана [2]). Отметим, что если допускать комплекснозначные $h_i(t)$, то разложение (1.3), как известно, осуществимо всегда, вне зависимости от неосцилляции или каких-либо иных условий; однако такая комплексная факторизация представляет значительно меньший интерес для приложений, чем вещественная.

Разложение Пойа—Маммана позволяет, в частности, получить обобщенную теорему Ролля для промежутка неосцилляции $J \subset (\alpha, \beta)$

$$\{L \in T_0 J,\ \ \varphi_x J \geqslant n+1,\ \ Lx = f \in CJ\} \to \varphi_f J \geqslant 1 \tag{1.4}$$

и вытекающую отсюда теорему о среднем значении (Г. Пойа [1], см. также [3], [4]).

Непосредственно ясна связь между неосцилляцией и интерполяционными вопросами. В частности, соотношение $L \in T_0 J$ эквивалентно, очевидно, утверждению «фундаментальная система решений (1.1) является строго чебышёвской на J» (см. 1.4, 26°), причем, если J — интервал или полуинтервал, то слово «строго» может быть опущено. Относительно связи с декартовыми системами см. 2.7, а также 4.2, где будет идти речь о модификации одного результата С. Н. Бернштейна [5, 6], относящегося к так называемым базам чебышёвских систем. М. Г. Крейн [7] применил соображения, связанные с неосцилляцией (для операторов с постоянными коэффициентами), в теории наилучшего приближения периодических функций.

Рассмотрим, далее, интерполяционную краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &Lx = f(t);\ \ x^{(i)}(t_j) = c_{ij} \quad (i = 0, 1, \ldots, k_j - 1;\ j = 1, 2, \ldots, m),\\ &\qquad (a \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant b, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Ее часто называют также задачей Валле-Пуссена (что не совсем оправдано, поскольку до Валле-Пуссена подобные задачи рассматривались многими математиками). В важном частном случае простых узлов — $m = n$ — интерполяционная задача сводится к отысканию решения, принимающего в n заданных точках заданные значения. Общий случай является в определенном смысле предельным для задач с простыми узлами при неограниченном сближении последних.

Условие $L \in T_0[a, b]$, очевидно, необходимо и достаточно для разрешимости всех задач вида (1.5). Более того, при этом условии, помимо самого факта существования функции Грина $G(t, s)$ любой (однородной) интерполяционной задачи, можно утверждать также, что $G(t, s)$ *совпадает по* *знаку с произведением*

$$(t-t_1)^{k_1}(t-t_2)^{k_2}\dots(t-t_m)^{k_m}$$

в квадрате $t,s\in(a,b)$. Это обстоятельство, отмечавшееся Е. С. Чичкиным [8] и автором [9] (см. также [10]) и являющееся довольно непосредственным следствием результатов Пойа (см. ниже лемму 4.2), может быть очевидным образом переформулировано в виде теоремы о дифференциальных неравенствах для интерполяционных краевых задач. В частности, для задачи с начальными условиями, в которую переходит (1.5) при $m=1$, *неосцилляция обеспечивает справедливость теоремы сравнения Чаплыгина: при* $L\in T_0(a,b)$

$$\left\{\begin{array}{r} u^{(k)}(a)=v^{(k)}(a),\ k=0,1,\dots,n-1;\\ Lu\geqslant Lv\ \text{ в }\ [a,b]\end{array}\right\}\to u(t)\geqslant v(t)\ \text{ в }\ [a,b]. \qquad (1.6)$$

Это очевидно и непосредственно, ввиду неотрицательности функции Коши $K(t,s)$ при $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$. Отметим, что неосцилляция не является необходимым условием для (1.6) (этот вопрос, кстати, упоминается Э. Беккенбахом и Р. Беллманом в [4] как нерешенный), о чем свидетельствует простой пример: $L=\dfrac{d^3}{dt^3}+\dfrac{d}{dt}$, $b-a>2\pi$.

Пусть $T[a,b]$ — класс операторов L, для которых справедлива теорема Чаплыгина (1.6). Соотношением $T_0(a,b)\subset T[a,b]$ отнюдь не исчерпывается связь между классами T,T_0; в частности, легко показать, что

$$\{L\in T_0(a,b),q(t)\leqslant 0\text{ в }[a,b]\}\to L+q\in T[a,b].$$

Более интересен случай $q(t)\geqslant 0$; в этом направлении может быть показано следующее. *Пусть* $L\in T_0(a,b)$ *и выполнено одно из условий: 1)* $q(t)\geqslant 0$; *2)* n *четно и* $q(t)$ *имеет на* (a,b) *одну, и притом убывающую, перемену знака. Тогда для соотношения* $L+q\in T[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала* $z(t)$ *такая, что* $\varphi_z a\geqslant n-2,\ z>0,\ Lz\leqslant 0$ $(a<t<b)$. Это предложение было сформулировано в [11] (требование четности n в [11] по недосмотру пропущено). Для $L=\dfrac{d^n}{dt^n}$ случай 1) был ранее рассмотрен Я. Микусинским [12], рассуждения которого после некоторой модификации переносятся на произвольные $L\in T_0(a,b)$; случай 2) требует более тонких рассмотрений.

Неосцилляция полезна при получении теорем о дифференциальных неравенствах также для других типов краевых условий и, в частности, для периодической краевой задачи (по этому поводу см. [13–16]). Относительно отличных от интерполяционных краевых задач, которые всегда разрешимы на промежутке неосцилляции, см. Р. Беллман [17] (интегральные краевые условия), В. А. Чуриков [18] (двухточечные условия).

Будучи составной частью общей теории распределения нулей решений (1.1), вопрос о неосцилляции, естественно, связан с другими аспектами этой теории, из которых здесь коснемся двух: условий принадлежности L классам $T_{i,k}J$ и вопросов перемежаемости нулей. По определению, $L \in T_{i,k}J$ $(i+k \geqslant n)$, если ни для каких $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ из промежутка J не существует нетривиальных решений $x(t)$ уравнения (1.1) таких, что $\varphi_x t_1 \geqslant i$, $\varphi_x t_2 \geqslant k$. Как известно, при любом фиксированном n $T_0 J = \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} T_{i,n-i}J$ (более содержательное утверждение дается ниже теоремой 3.3), $T_{n-1,1}J \subset TJ$. Некоторые достаточные условия включения $L + q \in T_{i,k}J$, где $L \in T_0J$, можно найти, например, в [11]. Отметим, что условие $L \in T_{k,k}J$ для формально самосопряженных операторов порядка $n = 2k$ И. М. Глазман называет неосцилляторностью на J; он исследовал (см. [19]) связь между неосцилляторностью на (t_0, ∞) и спектром L в соответствующем гильбертовом пространстве функций, а также получил ряд эффективных признаков осцилляторности и неосцилляторности на полуоси. Ясно, что неосцилляция (для формально самосопряженных операторов) влечет за собой неосцилляторность по И. М. Глазману, но не обратно; помимо случая $n = 2$, эти понятия совпадают, в частности, для $L = \dfrac{d^4}{dt^4} + \dfrac{d}{dt}\left(p\dfrac{d}{dt}\right) + q$, где $p(t)$, $q(t) \leqslant 0$. Некоторые свойства самосопряженных операторов из класса $T_{k,k}J$ изучались также в более ранней статье М. Г. Крейна [20].

В связи с перемежаемостью нулей остановимся на интересной работе В. А. Кондратьева [21], установившего, в частности, для $L = \dfrac{d^n}{dt^n} + q$, где $n = 3, 4$ и $q(t)$ строго знакопостоянна, теоремы типа: *между соседними нулями решения уравнения $Lx = 0$ лежит не более m нулей любого нетривиального решения этого же уравнения. Здесь $m = 2$ при $n = 3$; $m = 3$ при $n = 4$, $q(t) < 0$; $m = 4$ при $n = 4$, $q(t) > 0$.* В части, относящейся к $n = 3$, этот результат был распространен А. М. Ахундовым и А. Тораевым [22] на операторы вида $L = \dfrac{d^3}{dt^3} + p\dfrac{d}{dt} + q$, где $p(t) < 0$ и $q(t)$ строго знакопостоянна. Однако естественная граница применимости приведенных теорем В. А. Кондратьева лежит дальше: *они справедливы на промежутке J для всех операторов (третьего или четвертого порядка) вида $L = L_0 + q$, где $L_0 \in T_0J$ и $q(t)$ знакопостоянна в J*. Здесь содержится, в частности, результат [22], поскольку при $p_2(t) \leqslant 0$ на J

$$\frac{d^3}{dt^3} + p_1\frac{d^2}{dt^2} + p_2\frac{d}{dt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} + p_1\frac{d}{dt} + p_2\right)\frac{d}{dt} \in T_0J$$

в силу полугруппового свойства класса T_0J, которое вытекает из разложения Пойа—Маммана. Точно так же при $n = 4$ убеждаемся, например, что эти теоремы о перемежаемости нулей остаются в силе для операторов $\frac{d^4}{dt^4}+$ $+\frac{d}{dt}\left(p\frac{d}{dt}\right)+q$, где $p(t)\leqslant 0$ и $q(t)$ знакопостоянна ($t\in J$); действительно, из $p(t)\leqslant 0$ на J следует, что

$$\frac{d^4}{dt^4}+\frac{d}{dt}\left(p\frac{d}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2}+p\right)\frac{d}{dt}\in T_0J.$$

Обоснование приведенного обобщения в основном следует схеме доказательства В. А. Кондратьева [21] с привлечением соотношения

$$\{L\in T_0J,\ \ q(t)\geqslant 0\ \ \text{в}\ \ J\}\to L+(-1)^k q\in T_{n-k,k}J.$$

Упомянем также работы румынских математиков (Е. Молдован [23], О. Арамэ [24] и др.) выяснивших роль неосцилляции в круге вопросов, связанных с известной теоремой В. А. Маркова [25] о сохранении перемежаемости нулей многочленов при дифференцировании.

Много дает неосцилляция при изучении асимптотики решений. Так, в [26] показано, что для уравнения $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0$ с $q(t)$, знакопостоянной вблизи β, вопросы об ограниченности решений в (t_0,β), о стремлении решений к нулю при $t\uparrow\beta$ и некоторые другие вопросы того же типа сводятся при $L\in T_0(t_0,\beta)$ к нескольким квадратурам над p,q; в случае осцилляции о таком сведе́нии говорить не приходится. Далее, хорошо известно, что вопрос о ляпуновских зонах устойчивости для уравнения $\ddot{x}+q(t)x=0$ с ω-периодической $q(t)$ тесно связан с расстояниями между нулями решений (см. Н. Е. Жуковский [27], М. Г. Крейн [28], В. А. Якубович [29]*); в частности, *все решения ограничены на* $(-\infty,\infty)$*, если* $q(t)(\not\equiv 0)$ *неотрицательна в среднем и* $\frac{d^2}{dt^2}+q\in T_0[\tau,\tau+\omega]$ *при любом* $\tau\in[0,\omega)$ (в этом случае мы имеем дело с нулевой зоной устойчивости). Что касается уравнений произвольного порядка, то некоторые применения соображений, основанных на неосцилляции, к асимптотическим оценкам решений, как уже говорилось, будут продемонстрированы в § 5.

Существенная информация об асимптотике содержится, конечно, и в самом факте отсутствия колеблющихся при $t\uparrow\beta$ решений, непосредственно вытекающем из $L\in T_0(t_0,\beta)$. Здесь уместно отметить, что неосцилляционность конца β (т.е. существование $t_0\in[a,\beta)$ такого, что $L\in T_0(t_0,\beta)$) является при $n\geqslant 3$ более сильным требованием, нежели отсутствие у (1.1) колеблющихся при $t\uparrow\beta$ решений. Поясним это следующим примером. Пусть оператор $L\Big(=\frac{d^3}{dt^3}+\dots\Big)$ отвечает фундаментальной системе

*По этому поводу см. также обзорную статью В. М. Старжинского (ППМ 18 (1954)).

решений
$$x_1 = 1, \quad x_2 = t^{1/2} + \sin t, \quad x_3 = t - 2\cos t.$$

Поскольку вронскиан этой системы
$$2 + \sin t + t^{-1/2}\cos t + \frac{1}{4}t^{-3/2}(1 + 2\sin t) > 0 \ (0 < t < \infty),$$

то коэффициенты L непрерывны в $(0, \infty)$. Уравнение $Lx = 0$ не имеет колеблющихся при $t \to \infty$ решений, так как каждое отличное от константы решение ведет себя при больших t либо как $ct^{1/2}$, либо как ct $(c \neq 0)$. В то же время правый конец интервала $(0, \infty)$ не является неосцилляционным; более того, для сколь угодно больших t_0, r найдется нетривиальное решение $x(t)$ уравнения $Lx = 0$ такое, что $\varphi_x(t_0, \infty) > r$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на решения вида $t^{1/2} - a^{1/2} + \sin t$ с большим a.

Очень интересна связь между неосцилляцией и теорией осцилляционных ядер, ведущей свое начало от работ О. Келлога (рассматривавшего лишь симметричные ядра) и получившей весьма значительное развитие в работах Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна (см. [30–33]). Упомянутая выше связь обнаружена М. Г. Крейном (строго говоря, у М. Г. Крейна вместо неосцилляции фигурирует возможность разложения (1.3), но, как отмечалось, одно сводится к другому) и иллюстрируется утверждением [31], которое можно сформулировать следующим образом. *Пусть* $G_k(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ — *функция Грина оператора* L *при краевых условиях*
$$\varphi_x a \geqslant n - k, \quad \varphi_x b \geqslant k. \tag{1.7}$$

Каждое из ядер $(-1)^k\, G_k(t, s)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *является осцилляционным в том и только том случае, если* $L \in T_0[a, b]$. Обращаем внимание на различие в терминологии: *неосцилляция* решений эквивалентна *осцилляционности* функций Грина, взятых с соответствующими знаками. Как известно, осцилляционность ядра влечет за собой ряд сильных следствий; в частности, из приведенного результата М. Г. Крейна вытекает, что *задача* $Lx = \lambda r(t)\, x$ $(L \in T_0[a, b],\ r(t) > 0)$ *при краевых условиях (1.7) имеет только вещественные собственные значения, совпадающие по знаку с* $(-1)^k$*, причем* m*-я собственная функция имеет в* (a, b) *ровно* $m - 1$ *нуль* (см. [30, 31]). Итак, хотя доказательства признаков неосцилляции часто напоминают по характеру оценку первого собственного значения, фактически неосцилляция связана с существенно более «глубинными» свойствами оператора L.

Остановимся в этой связи еще на одном идейном моменте. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн в монографии [33] (стр. 13) высказывают мнение, что при изучении колебаний (в плане теории осцилляционных ядер) аппарат интегральных уравнений является, сравнительно с дифференциальными уравнениями, «наиболее естественным со всех точек зрения». С этим авторитетным мнением нельзя не согласиться, если иметь в виду изучение следствий осцилляционности функций Грина; однако с точки зрения проверки самого факта осцилляционности дело обстоит иначе — здесь дифференциальные уравнения играют решающую роль, о чем свидетельствуют в первую очередь собственные исследования этих же авторов. Напомним, что осцилляционное ядро $G(t,s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ характеризуется следующими неравенствами: $G(t,s) > 0$ $(a < t, s < b)$ и

$$\det |G(t_i, s_j)|_1^m \geqslant 0 \left(a < \begin{array}{c} t_1 < t_2 < \dots < t_m \\ s_1 < s_2 < \dots < s_m \end{array} < b \right) (m = 1, 2, \dots), \quad (1.8)$$

причем при $t_i = s_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ неравенства (1.8) должны быть строгими. Прямая проверка выполнения счетного числа неравенств (1.8) для конкретных ядер представляется, за исключением некоторых тривиальных случаев, практически недоступной и, если бы не существовало косвенных способов такой проверки, теория осцилляционных ядер представляла бы, пожалуй, лишь академический интерес. Существенно, что такие способы имеются, если $G(t,s)$ — функция Грина (с точностью до знака) оператора $L \in T_0(a,b)$ при подходящих краевых условиях. Именно, в [33] показано (гл. III, § 6), что неравенства (1.8) эквивалентны, приблизительно говоря, следующему: интегральный оператор, порожденный ядром $G(t,s)(> 0)$, не повышает числа перемен знака. Эта переформулировка все еще выглядит неэффективной. Однако, переходя далее к обратному дифференциальному оператору L, получаем следующее: оператор L, примененный к гладким функциям, удовлетворяющим краевым условиям, *не понижает* числа перемен знака. А это утверждение при подходящих краевых условиях, скажем, при условиях (1.7), проверяется уже без особого труда с помощью разложения (1.3) и соображений типа теоремы Ролля. Как видим, дифференциальное уравнение выступает здесь на первый план. (Аргументация П. Д. Калафати [34] также существенно использует специфику дифференциальных уравнений, хотя и в более завуалированном виде.) Важна и следующая сторона дела, которая до сих пор, по-видимому, не подчеркивалась. Получение «явного» выражения для функции Грина или для разложения (1.3) возможно, очевидно, в том и только том случае, когда известна фундаментальная система решений (1.1). В то же время в приведенной схеме имеет значение лишь существование разложения (1.3), т. е. сам факт неосцилляции, для проверки которого известен ряд эффективных признаков, например, теоремы валле-пуссеновского типа (см. ниже), требующие лишь некоторых оценок для коэффициентов $p_i(t)$ и отнюдь не предполагающие знания фундаментальной системы. Таким образом, в данном случае *признаки неосцилляции не только дают возможность проверять осцилляционность функции Грина $G(t,s)$ (взятой с соответствующим знаком),* *минуя неравенства (1.8), но, более того, позволяют осуществлять такую проверку, когда даже получение явного аналитического выражения для $G(t,s)$ заведомо невозможно.* Конечно, приведенная схема проверки осцилляционности применима в чистом виде лишь при некоторых краевых условиях; для более широкого класса краевых задач неосцилляция является, вообще говоря, лишь необходимым, но не достаточным условием осцилляционности (с точностью до знака) функции Грина. Однако и в этих случаях, несомненно, могут быть указаны эффективные признаки осцилляционности, не опирающиеся, в отличие от известных, на явное представление L в виде (1.3) (т. е. на знание решений уравнения $Lx = 0$). Эта проблематика представляется весьма перспективной.

1.3. Сделанный выше обзор, как нам кажется, убедительно подтверждает актуальность вопроса об эффективных способах проверки неосцилляции. Известные в этом направлении результаты можно подразделить на несколько типов.

Если оставить в стороне результаты, относящиеся к классическому вопросу о неколебательности при $t \uparrow \beta$ решений уравнений второго порядка, то наиболее многочисленными являются признаки неосцилляции валле-пуссеновского типа [9, 35–38], отражающие тот факт, что «в малом» неосцилляция всегда имеет место, и формулируемые обычно в виде

$$f(b-a, \|p_1\|, \|p_2\|, \dots, \|p_n\|) \leqslant 0 \to L \in T_0[a,b], \tag{1.9}$$

зачастую с теми или иными модификациями (строгий знак неравенства, заключение в виде $L \in T_0(a,b)$ и т. п.). Здесь $f(u_0, u_1, \dots, u_n)$ — функция, возрастающая по всем аргументам, причем обычно

$$f(0, u_1, u_2, \dots, u_n) < 0, \quad f(u_0, 0, 0, \dots, 0) < 0.$$

Нормы для коэффициентов могут выбираться по-разному, например,

$$\|p_i\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |p_i(t)|, \;\; \|p_i\| = \left\{\int_a^b |p_i(t)|^k dt\right\}^{1/k} \quad (1 \leqslant k < \infty) \text{ и т.п.} \tag{1.10}$$

Условие $f \leqslant 0$ в (1.9) означает, приблизительно говоря, достаточную близость L к оператору $\dfrac{d^n}{dt^n}$ на $[a,b]$. Первый результат такого рода был получен Валле-Пуссеном [35] (см. также [39]); позднее были найдены различные улучшения и обобщения теоремы Валле-Пуссена; см. ниже пункт 4.5. Как в [35], так и в ряде других работ, наряду с линейными рассматривались также квазилинейные уравнения, которых мы здесь не касаемся. Специфическое достоинство валле-пуссеновских признаков состоит в том, что их условия всегда выполняются на достаточно малом промежутке; точнее, при любых фиксированных L и $a \in (\alpha, \beta)$ посылка импликации (1.9) имеет место, если $b\,(> a)$ достаточно близко к a (предполагается, конечно, что коэффициенты p_i принадлежат соответствующему функциональному пространству; если, например, норма введена первым из равенств (1.10), то p_i должны быть локально ограничены в (α, β)). Некоторые из известных признаков неосцилляции этого типа, главным образом для операторов младших порядков и для двучленных операторов $\dfrac{d^n}{dt^n} + q$, имеют относительно используемых характеристик коэффициентов неулучшаемый характер. Они представляют интерес не только сами по себе, но отчасти и как своеобразный полигон для применения и отшлифовки различных средств оптимизации, среди которых наиболее употребительны: теоремы сравнения чаплыгинского типа, тесно связанные с абстрактной теорией положительных операторов; классическое вариационное исчисление (вместе с вариационными свойствами собственных значений самосопряженных задач); принципы оптимального управления, разработанные школой Л. С. Понтрягина. Укажем некоторые работы, где можно найти признаки неосцилляции неулучшаемого характера: для $\dfrac{d^2}{dt^2} + q$ — [27–29, 40–42] (здесь превалирует терминология, связанная с устойчивостью или с оценкой собственных значений краевых задач; вместо нормы q, ввиду теоремы Штурма, оценивается норма функции $q_+ = \max\{0, q(t)\}$ или, более общо, функции $(q + c)_+ = \max\{0, q(t) + c\}$, $c = \mathrm{const} < \dfrac{\pi^2}{(a-b)^2}$); для $\dfrac{d^2}{dt^2} + p\dfrac{d}{dt} + q$ — [43–46]; для операторов третьего порядка [47] (здесь идет речь о разрешимости задач, краевые условия которых в линейном однородном случае имеют вид $\varphi_x t_1 \geqslant n-1$, $\varphi_x t_2 \geqslant 1$; как известно, при $n = 3$ невырожденность таких задач при любых несовпадающих t_1, t_2 из J эквивалентна неосцилляции на J); для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q$ [48, 49]. В частности, в [48] доказана теорема сравнения

$$\left\{\frac{d^n}{dt^n} + q_i \in T_0 J,\ i = 1, 2;\ q_1(t) \leqslant q(t) \leqslant q_2(t) \text{ в } J\right\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q \in T_0 J, \quad (1.11)$$

благодаря которой вопрос о неулучшаемом в терминах ξ, η достаточном условии для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q \in T_0[a, b]$ при $\xi \leqslant q(t) \leqslant \eta$ (и, в частности, при $|q(t)| \leqslant \eta$) сводится к решению несложных трансцендентных уравнений; в [49] с помощью формулы следов и упоминавшегося выше результата М. Г. Крейна [31] получен довольно тонкий интегральный признак неосцилляции для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q$. Вопрос о неулучшаемом признаке неосцилляции валле-пуссеновского типа для операторов общего вида рассмотрен в [50], однако полученный здесь результат носит малоэффективный характер. Позднее, в 4.5 мы еще вернемся к обсуждению отдельных эффективных признаков неосцилляции.

Специфическим недостатком валле-пуссеновских теорем является то, что они пригодны лишь для конечных промежутков. Разумеется, доставляемые этими теоремами условия неосцилляции являются лишь достаточными и, вообще говоря, далеки от необходимых.

С другой стороны, известен [1] критерий неосцилляции, носящий совершенно иной характер и основанный на условии, которое Пойа называет «свойством W» оператора L на данном промежутке. Приведем на этот счет две близкие формулировки. Через $[v_1, v_2, \ldots, v_k](t)$ обозначается вронскиан функций $v_1(t)$, $v_2(t), \ldots,$ $v_k(t)$.

1°. *Пусть* $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$. *Для соотношения* $L \in T_0[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы нашлись решения* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *уравнения (1.1) такие, что*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k](t) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,(a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.12}$$

2°. *Пусть* E^n *— некоторое* n*-мерное пространство функций из* $C^{n-1}[a,b]$. *Для того чтобы каждая функция* $u(t) \in E^n (u \not\equiv 0)$ *удовлетворяла условию* $\varphi_u[a,b] \leqslant n-1$, *необходимо и достаточно, чтобы в* E^n *нашелся базис* $\{u_i\}$ *такой, что*

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k](t) \neq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n) \ \ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.13}$$

Строгое знакопостоянство вронскианов существенно: наличие хотя бы изолированных нулей четной кратности может коренным образом изменить ситуацию. Пример: фундаментальной системе $x_1 = t^2$, $x_2 = -t$, $x_3 = t^4 - 5t^2 + 4$ отвечает оператор с непрерывными в $(-\infty,\infty)$ коэффициентами, так как $[x_1, x_2, x_3] = 6t^4 + 8 > 0$; здесь $x_1 = [x_1, x_2] = t^2$, но x_3 имеет на $(-\infty,\infty)$ 4 перемены знака.

Формулировка 1° несколько уступает в общности формулировке 2° ввиду больших требований гладкости (абсолютная непрерывность $(n-1)$-х производных). Более существенным, однако, является следующее неформальное различие. Предложение 2° доставляет, с точки зрения теории функций, эффективный критерий «строгой чебышёвости» (алгоритм для отыскания соответствующего базиса может быть указан). Критерий 1° естественно рассматривать в плане качественной теории дифференциальных уравнений; поскольку он опирается на знание решений (1.1), то должен квалифицироваться как неэффективный.

Итак, известны эффективные признаки неосцилляции, с одной стороны, и неэффективный критерий, — с другой; оптимальный вариант — «эффективный критерий» — здесь заведомо недостижим. Имеется, однако, еще один важный класс теорем, типичным представителем которых является следующий общеизвестный критерий неосцилляции при $n = 2$, также принадлежащий Валле-Пуссену [35]. Пусть $n = 2$, $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$. *Соотношение* $L \in T_0[a,b]$ *имеет место в том и только том случае, если существует* $z(t) \in C^1_*[a,b]$ *такая, что* $z > 0$, $Lz \leqslant 0\,(a < t \leqslant b)$. Здесь и далее $C^m_* J$ —

множество функций с абсолютно непрерывной в J m-й производной. Этот простой факт, почти непосредственно вытекающий из теоремы Штурма, весьма удобен в приложениях. Подобные теоремы, дающие необходимые и достаточные условия тех или иных свойств решений в терминах существования одной или нескольких «пробных» функций $z_i(t)$, удовлетворяющих определенным неравенствам (и, может быть, равенствам типа краевых условий), характерны для многих исследований последнего времени; это связано с общим проникновением дифференциальных и интегральных неравенств в качественную теорию, которое стало особенно интенсивным после известных работ С. А. Чаплыгина (см. [51], а также [52, 53]). Критерии подобной структуры мы будем кратко называть *полуэффективными,* исходя из следующего: они не являются эффективными критериями, поскольку отсутствует правило выбора «наилучших» пробных функций для каждого конкретного случая; в то же время называть эти критерии неэффективными также неуместно, поскольку они позволяют посредством конкретизации пробных функций генерировать серию и, в определенном смысле, исчерпывающую серию, эффективных признаков. Приблизительно говоря, полуэффективный критерий эффективен как достаточное условие и неэффективен как необходимое. Отсюда, кстати, существенное различие между полуэффективными критериями для A и для не-A: хотя в обоих случаях речь идет в конечном счете об одном и том же, такие критерии часто далеки друг от друга по формулировкам (ср., например, теорему 4.1 и лемму 5.1) и знание одного из них обычно мало помогает при получении другого.

Полуэффективные критерии (приведенное описание их не претендует, конечно, на формальную четкость) могут относиться к разнообразным свойствам решений. Так, выше приводился полуэффективный критерий применимости теоремы Чаплыгина на промежутке J для операторов типа $L+q$, где $L \in T_0 J,\ q(t) \geqslant 0$; в [54] отмечался полуэффективный критерий осцилляции (см. ниже лемму 5.1). С. А. Пак получил [14] полуэффективные критерии знакопостоянства функции Грина краевой задачи Штурма—Лиувилля при $n = 2$. Известные теоремы об устойчивости решений уравнения $\dot{X} = F(X, t)$ (X — n-мерный вектор), основанные на существовании функции Ляпунова и допускающие обращение, также могут рассматриваться как полуэффективные критерии устойчивости. Правда, в этом случае пробные функции зависят от $n+1$ переменных, тогда как специфика линейных уравнений позволяет в ряде случаев ограничиться функциями одной переменной; в линейной теории именно такие формулировки представляют, по-видимому, основной интерес. Отметим, что подобный критерий применимости теоремы Чаплыгина для операторов общего вида до сих пор не найден.

Вернемся к неосцилляции. Вопрос о полуэффективном критерии неосцилляции для уравнений порядка $n > 2$ стоял довольно давно и в этом направлении были получены некоторые результаты. Н. В. Азбелев [55] предложил полуэффективный критерий неосцилляции для уравнений третьего порядка; в формулировке, усовершенствованной В. А. Кондратьевым (см. Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк [56]), этот критерий выглядит следующим образом. *Пусть* $n = 3$, $p_i(t) \in C_*^{2-i}[a,b)$ $(i = 1, 2)$. *Соотношение* $L \in T_0[a,b)$ *имеет место в том и только том случае, если существуют* $z_1, z_2 \in C_*^2[a,b)$ *такие, что* $z_i(a) = 0$, $z_i(t) > 0$ *в* (a,b) $(i = 1,2)$, $Lz_1 \leqslant 0$, $L^* z_2 \geqslant 0$ *в* (a,b). Здесь $L^*\Big(= -\dfrac{d^3}{dt^3} + \ldots\Big)$ — формально сопряженный к L оператор. Идея, на которой основан этот законченный результат, существенно связана со спецификой случая $n = 3$ и не допускает распространения на уравнения произвольного порядка.

Простой полуэффективный критерий неосцилляции для операторов вида $L + q$, где $L \in T_0 J$ $\Big($в частности, для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q\Big)$, а $q(t)$ знакопостоянна, был предложен автором в [49]. Однако в общем случае полуэффективный критерий неосцилляции не был известен. Этот пробел восполняет уже приводившаяся выше теорема 4.1.

Возможно, не лишено интереса следующее обстоятельство. Сопоставляя приведенные выше критерии Валле-Пуссена (для $n = 2$) и Пойа, естественно предположить, что требуемый критерий может заключаться в существовании $z_1(t)$, $z_2(t), \ldots, z_{n-1}(t)$, для которых $2n - 2$ функций

$$[z_1, z_2, \ldots, z_k], \quad Lz_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

имеют некоторые заданные знаки. Более внимательный анализ, однако, показывает, что это не так: уже при $n = 3$ никакая комбинация знаков четырех функций z_1, $[z_1, z_2]$, Lz_1, Lz_2 на промежутке $[a,b]$ не обеспечивает (без дополнительных предположений) неосцилляции в $[a,b]$ или хотя бы в (a,b). Для получения корректной формулировки систему знакоопределенных вронскианов оказалось необходимым расширить.

1.4. Приведем список систематически применяемых ниже обозначений и терминов. Некоторые из них будет удобнее вводить по ходу изложения. Во избежание недоразумений мы уточняем смысл ряда употребительных терминов с неустановившимся значением. Все величины, как правило, предполагаются вещественными; в дальнейшем это не оговаривается.

1°. Под *промежутком* понимается любое связное непустое подмножество вещественной прямой — конечной или расширенной. Промежутки вида $[a,b]$, т. е. с включенными концами, именуются *отрезками*, промежутки вида (a,b), т. е. без концов, — *интервалами*; $[a,b)$, $(a,b]$, как и обычно, — *полуинтервалы*,

2°. $\varnothing$ — пустое множество.

В 3°–5° J — произвольный промежуток, $J \subset (-\infty, \infty)$.

3°. $C^m J$ — совокупность функций $u(t)$, m-кратно непрерывно дифференцируемых в J. $C[a,b]$, $C^m[a,b]$ рассматриваются также как пространства с естественной нормой.

4°. $C^m_* J$ — совокупность функций $u(t)$ таких, что $u^m(t)$ абсолютно непрерывна в J (т. е. в любом отрезке $[a,b] \subset J$).

5°. Выражение «$u(t)$ знакопостоянна в J» («$u(t)$ строго знакопостоянна в J») означает, что либо $u(t) \geqslant 0$ (> 0) при всех $t \in J$, либо $u(t) \leqslant 0$ (< 0) при всех $t \in J$. Ниже будут неоднократно встречаться соотношения типа $u(t) \geqslant 0$, $u(t) < 0$, $u(t) \not\equiv 0$ $(t \in J)$ и т.п., в ситуации, когда на $u(t)$ наложено лишь требование локальной суммируемости в J; в таких случаях следует понимать эти соотношения как выполняющиеся почти всюду в J (подобные оговорки в дальнейшем часто опускаются).

6°. $\varphi_u s$ — кратность нуля функции $u(t)$ в точке $t = s$ $(0 \leqslant \varphi_u s \leqslant \infty)$. Точнее, неравенство $\varphi_u s \geqslant m$ означает, что

$$u(s) = \dot{u}(s) = \cdots = u^{(m-1)}(s) = 0, \tag{1.14}$$

а равенство $\varphi_u s = m$ означает, что при выполнении (1.14) $u^{(m)}(s)$ либо отлична от нуля, либо не существует (с последней возможностью, впрочем, мы редко будем сталкиваться). То же обозначение используется для *обобщенной кратности* — см. пункт 2.2.

7°. $\varphi_u J$ — число нулей функции $u(t)$ на промежутке J с учетом кратности.

8°. $\psi_u J$ — число геометрически различных нулей $u(t)$ на промежутке J (ясно, что $0 \leqslant \psi_u J \leqslant \varphi_u J \leqslant \infty$).

9°. $t^i_u J$ — i-й нуль $u(t)$ в J при нумерации в порядке возрастания с учетом кратности $(t^1_u J \leqslant t^2_u J \leqslant \cdots \leqslant t^k_u J,\ k = \varphi_u J)$.

10°. $t^u_i J$ — i-й нуль $u(t)$ в J при нумерации в порядке возрастания без учета кратности $(t^u_1 J < t^u_2 J < \cdots < t^u_r J,\ r = \psi_u J)$.

Обозначения $t^i_u J$, $t^u_j J$ будут встречаться лишь в случаях, когда $i \leqslant \varphi_u J < \infty$, $j \leqslant \psi_u J < \infty$ соответственно, т. е. когда они вполне определены.

11°. $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{pmatrix}$ — минор матрицы A, образованный строками с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцами с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

12°. $[u_1, u_2, \ldots, u_m] = [u_1, u_2, \ldots, u_m](t)$ — вронскиан функций $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots, u_m(t)$. Часто для вронскианов будут использоваться также следующие записи:

$$[u;\, k \ldots l] = [u_k, u_{k+1}, \ldots, u_l]\ (k \leqslant l),$$
$$[u;\, k \ldots l \backslash m] = [u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{m-1}, u_{m+1}, \ldots, u_l](k \leqslant l).$$

Добавка «$\ldots \backslash m$» указывает, таким образом, на исключение u_m. Неравенство $k \leqslant m \leqslant l$ здесь, вообще говоря, не предполагается: если $m < k$ или

$m > l$, то $[u;\, k \dots l \backslash m] = [u;\, k \dots l]$. Для удобства полагается, по определению, $[u;\, k \backslash k](t) \equiv 1$.

13°. $I = (\alpha, \beta)$ — фиксированный интервал $(-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty)$; $\overline{I} = [\alpha, \beta]$.

14°. $L = \dfrac{d^n}{dt^n} + p_1(t)\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t)\dfrac{d}{dt} + p_n(t)$ — фиксированный обыкновенный линейный дифференциальный оператор n-го порядка с вещественными и локально суммируемыми на I (т. е. на каждом отрезке $[a, b] \subset I$) коэффициентами $p_1(t), \dots, p_n(t)$. (Единичный оператор при $p_n(t)$ для простоты опускается; это не поведет к недоразумениям, поскольку будут рассматриваться только однородные операторы.) Решениями уравнений (1.1), как обычно, называются функции $x \in C_*^{n-1} I$ такие, что $(Lx)(t) = 0$ почти при всех $t \in I$. Для большинства рассматриваемых ниже вопросов нет существенной разницы между случаями непрерывных и локально суммируемых коэффициентов По этой причине мы не делаем специальных оговорок при ссылках на работы (различных авторов), где требование непрерывности коэффициентов формально присутствует, но не влияет по существу ни на формулировки, ни на доказательства результатов.

Отметим, что содержание настоящей работы с очевидными изменениями переносится на операторы несколько более общего вида $p_0(t)\dfrac{d^n}{dt^n} + \dots + p_n(t)$, где $p_0(t) \geqslant 0$ в I и отношения $\dfrac{p_i(t)}{p_0(t)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ локально суммируемы в I. Игнорируя возможность этого (в сущности, фиктивного) обобщения, ограничимся случаем $p_0(t) \equiv 1$. Напомним, что в этом случае оператор L однозначно восстанавливается по фундаментальной системе $\{x_i\}$ решений уравнения (1.1) формулой

$$Lx \equiv \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n, x]}{[x_1, x_2, \dots, x_n]}.$$

Будем говорить, что оператор L *отвечает* фундаментальной системе $\{x_i\}$. Ясно, что системе определенных в I функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ в том и только в том случае отвечает некоторый оператор L с локально суммируемыми в I коэффициентами, если выполнены два условия:

$$1)\ x_i \in C_*^{n-1} I \ \ (i = 1, 2, \dots, n); \qquad 2)\ [x_1, x_2, \dots, x_n](t) \neq 0 \ \text{ в } \ I.$$

15°. Точка α (β) называется *несингулярным концом* интервала I, если $\alpha > -\infty$ $(\beta < \infty)$ и коэффициенты $p_1(t), \dots, p_n(t)$ суммируемы на некотором, а следовательно, и на любом, отрезке вида $[\alpha, t_0]$ $([t_0, \beta])$, где $t_0 \in I$; в противном случае конец α (β) называется сингулярным.

16°. Us — окрестность точки $s \in I$, содержащаяся в I, т. е. произвольный интервал вида (s_1, s_2), где $\alpha < s_1 < s < s_2 < \beta$.

17°. U_+s — правая (открытая) полуокрестность точки $s \in [\alpha, \beta)$, содержащаяся в I, т. е. произвольный интервал вида (s, s_1), где $\alpha \leqslant s < s_1 < \beta$. Аналогично, левая полуокрестность U_-s есть интервал вида (s_1, s), где $\alpha < s_1 < s \leqslant \beta$.

18°. Выражения «*вблизи* α», «*вблизи* β» будут часто употребляться взамен выражений «в некоторой $U_+\alpha$», «в некоторой $U_-\beta$» соответственно.

19°. Функция $y(t)$, непрерывная вблизи $\alpha(\beta)$, называется *колеблющейся при* $t \downarrow \alpha$ $(t \uparrow \beta)$, если в любой $U_+\alpha$ $(U_-\beta)$ $y(t)$ не является ни строго знакопостоянной функцией, ни тождественным нулем.

20°. Запись «$f(t) \prec\!\!\prec g(t)$ $(t \uparrow t_0)$» или, что то же самое, «$g(t) \succ\!\!\succ f(t)$ $(t \uparrow t_0)$» означает, что $f(t)$ и $g(t)$ положительны в некоторой U_-t_0 и $f = o(g)$ при $t \uparrow t_0$ (т. е. $\dfrac{f(t)}{g(t)} \to 0$ при $t \uparrow t_0$). Аналогичен смысл соотношений «$f \prec\!\!\prec g(t \downarrow t_0)$», «$g \succ\!\!\succ f(t \downarrow t_0)$» (разумеется, U_-t_0 при этом заменяется на U_+t_0).

21°. $\mathfrak{M}$ — n-мерное пространство решений уравнения (1.1), снабженное какой-либо нормой. $\mathfrak{M}'$ — подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из нетривиальных решений (1.1).

22°. $\mathfrak{N}J$ — совокупность $x \in \mathfrak{M}'$ таких, что $\varphi_x J \geqslant n$.

В обозначениях $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}J$ (и еще некоторых других, которые встретятся позднее) не подчеркнута зависимость от L; это не приведет к недоразумениям, так как пара (I, L) рассматривается как произвольная, но фиксированная.

23°. T_0J — класс операторов L, для которых $\mathfrak{N}J = \varnothing$, т. е. J является *промежутком неосцилляции*. Таким образом, $L \in T_0J \leftrightarrow \mathfrak{N}J = \varnothing$. Будет удобно также считать, что $L \in T_0\ \varnothing$.

Обозначения $\mathfrak{N}J$, T_0J определены пока для $J \subset I$; по поводу случаев $J \subset \overline{I}$ см. пункт 2.2.

24°. α (β) называется *неосцилляционным концом* I и пишется $\overline{\alpha} \neq \alpha$ $(\underline{\beta} \neq \beta)$, если $L \in T_0U_+\alpha$ $(L \in T_0U_-\beta)$ для некоторой $U_+\alpha$ $(U_-\beta)$; в противном случае пишем $\overline{\alpha} = \alpha$ $(\underline{\beta} = \beta)$. Эти записи до 3.3 можно понимать чисто формально. Несингулярный конец, очевидно, всегда является неосцилляционным, но не обратно.

25°. $\overline{s}(\underline{s})$ — *сопряженная к* s *справа (слева) точка*, см. пункт 3.3.

26°. Система функций $u_i(t) \in C^{m-1}J$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ называется *строго чебышёвской на* J, если всякая нетривиальная (т. е. имеющая хотя бы один ненулевой коэффициент) линейная комбинация $u = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$ удовлетворяет условию $\varphi_u J \leqslant m - 1$. (Отличие от обычного определения чебышёвской системы состоит в том, что здесь фигурируют $C^{m-1}J$, $\varphi_u J$ вместо CJ, $\psi_u J$ соответственно.) Разумеется, всякая строго чебышёвская система является чебышёвской.

27°. Декартова система, $(+)$-*декартова система* – см. 2.7.

28°. *ИФС* — см. 2.2; *ДИФС* — см. 4.2.

29°. *Согласованная система* — см. 4.1.

30°. *Критериями* мы называем лишь необходимые и достаточные условия (оставляя для достаточных термин «признак»). О *полуэффективных критериях* см. 1.3.

§ 2. Иерархия решений

В настоящем параграфе исследуется в основном поведение решений в окрестности неосцилляционного конца интервала I. Мы сосредоточим внимание на поведении решений в $U_{-}\beta$, отмечая попутно необходимые изменения в переформулировках для $U_{+}\alpha$.

2.1.

Лемма 2.1. *Пусть E^n — некоторое n-мерное пространство непрерывных в I функций. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) каждая $x \in E^n (x \not\equiv 0)$ строго знакопостоянна вблизи β;

2) в E^n существует базис $\{x_i\}$ такой, что

$$x_1 \prec\!\!\prec x_2 \prec\!\!\prec \ldots \prec\!\!\prec x_n (t \uparrow \beta). \tag{2.1}$$

Импликация 2)$\to$ 1) и линейная независимость функций $x_i(t)$, удовлетворяющих условию (2.1), очевидны; в доказательстве нуждается лишь тот факт, что 1) влечет за собой существование в E^n функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, для которых выполняется (2.1).

Пусть 1) имеет место. Рассмотрим отношение $f(t) = \dfrac{z_1(t)}{z_2(t)}$ любых линейно независимых $z_1, z_2 \in E^n$; в силу 1) и непрерывности z_1, z_2 функция $f(t)$ непрерывна вблизи β. Кроме того, для любого числа c $f(t) \neq c$ вблизи β; это следует из условия 1), отнесенного к $z = z_1 - cz_2$ ($\not\equiv 0$). Тем самым обеспечено существование предела (конечного или бесконечного) $f(t)$ при $t \uparrow \beta$. Таким образом, для любых z_1, $z_2 \in E^n$, положительных вблизи β, при $t \uparrow \beta$ имеет место лишь одна из трех возможностей: $z_1 \prec\!\!\prec z_2$, $z_1 \succ\!\!\succ z_2$, $z_1 \sim cz_2$ $(0 < c < \infty)$.

Пусть z_1, z_2, $\ldots$, z_n — линейно независимые и положительные вблизи β функции из E^n. Положим $x_1^1 = z_1$. Пусть уже построена состоящая из линейных комбинаций z_1, z_2, $\ldots$, z_k система $\{x_i^k\}$ «длины k» ($1 \leqslant k \leqslant n - 1$): $x_1^k \prec\!\!\prec x_2^k \prec\!\!\prec \ldots \prec\!\!\prec x_k^k$ $(t \uparrow \beta)$. Тогда система «длины $k + 1$» строится так. Сравним z_{k+1} с x_i^k при $t \uparrow \beta$. Возможны два случая: а) при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant k$ выполняется какое-либо из соотношений $z_{k+1} \prec\!\!\prec x_i^k$, $z_{k+1} \succ\!\!\succ x_i^k$; б) для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ $z_{k+1} \sim c x_j^k$ $(0 < c < \infty)$. В первом случае, дополняя систему $\{x_i^k\}$ функцией z_{k+1}, получаем после соответствующей перенумерации систему «длины $k+1$». Во втором случае полагаем $z^1_{k+1} = \pm(z_{k+1} - c\,x^k_j)$, выбирая знак так, чтобы z^1_{k+1} была положительной вблизи β, после чего повторяем то же рассуждение с заменой z_{k+1} на z^1_{k+1}. Возможно, и для z^1_{k+1} осуществится случай б): $z^1_{k+1} \sim c_1 x^k_{j_1}$; однако при этом заведомо $j_1 < j$ (поскольку $z^1_{k+1} \lll x^k_j$), так что не позднее, чем через k шагов, случай б) уступит место а) и мы получим систему «длины $k+1$». Увеличивая таким образом число функций, придем к требуемой системе «длины n».

2.2. Если $\underline{\beta} \neq \beta$, то условие 1) леммы, очевидно, выполняется. Итак, если β является неосцилляционным концом, уравнение $Lx = 0$ обладает фундаментальной системой решений $\{x_i(t)\}$ — мы ее будем называть *иерархической фундаментальной системой (ИФС) при* $t \uparrow \beta$, для которой выполнены соотношения (2.1). Ясно, что ИФС при $t \uparrow \beta$ не единственна; если $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$, то остальные ИФС $\{y_i\}$ при $t \uparrow \beta$ можно получить треугольными линейными преобразованиями $y_i = \sum\limits_{j=1}^{i} c_{ij}\,x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с положительными $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$. «Минимальное» при $t \uparrow \beta$ решение $x_1(t)$ определено однозначно с точностью до положительного множителя.

Аналогично, если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, то существует ИФС $\{x_i\}$ при $t \downarrow \alpha$, т. е. фундаментальная система решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ уравнения $Lx = 0$ такая, что $x_1 \ggg x_2 \ggg \ldots \ggg x_n$ $(t \downarrow \alpha)$. Различие в нумерации для случаев $t \downarrow \alpha$ и $t \uparrow \beta$ удобно по соображениям, которые станут ясны ниже.

Поскольку вместо интервала I можно было рассматривать любой его подынтервал, то для любого $t_0 \in I$ существуют ИФС как при $t \uparrow t_0$, так и при $t \downarrow t_0$. Однако в этом случае, а также в случае несингулярных концов, ИФС могут быть тривиально получены заданием соответствующих начальных условий для $x_i(t)$. Например, для получения ИФС $\{x_i\}$ при $t \uparrow t_0 \in I$ следует выбрать начальные условия для $x_i(t)$ в точке t_0 так, чтобы

$$x_i^{(j)}(t_0) = 0 \text{ при всех } j < n - i, \quad (-1)^{n-i} x_i^{n-i}(t_0) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. так, чтобы $\varphi_{x_i} t_0 = n - i$, $x_i(t_0 - 0) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. О начальных условиях в сингулярном конце интервала говорить не приходится; однако эта аналогия с несингулярным случаем подсказывает введение полезного понятия *обобщенного нуля*.

Именно, пусть $\underline{\beta} \neq \beta$, $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$. Условимся каждому $x \in \mathfrak{M}'$ вида $x = o(x_n)$ $(t \uparrow \beta)$ приписывать в точке β нуль кратности $k (\geqslant 1)$, где

$$k \text{ есть максимальное из } l \text{ таких, что } x = o(x_{n-l+1}) \ (t \uparrow \beta). \qquad (2.2)$$

Для остальных $x \in \mathfrak{M}'$ полагаем $\varphi_x \beta = 0$.

Эквивалентное определение $\varphi_x\beta$ можно дать и несколько иначе:

$$\varphi_x\beta = k \longleftrightarrow \Big\{x = \sum_{i=1}^{n-k} c_i x_i, c_{n-k} \neq 0\Big\}.$$

Определенное потенциальное преимущество формы (2.2) состоит в том, что такое определение допускает распространение на произвольные функции; это оказывается полезным при исследовании краевых задач для неоднородного уравнения $Lx = f$ с сингулярными краевыми условиями, состоящими в ограничении на порядок роста $x(t)$ при $t \uparrow \beta$. Если $\underline{\beta} \neq \beta$, то такие условия по ряду причин целесообразно трактовать как условия вида $\varphi_x\beta \geqslant l$ с соответствующим значением l; при этом связь между сингулярными и несингулярными краевыми задачами становится чрезвычайно рельефной. В настоящей работе мы не сможем сколько-нибудь подробно остановиться на задачах с обобщенными кратностями в краевых условиях.

Аналогично, если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\{y_i\}$ — ИФС при $t \downarrow \alpha$, то приписываем в точке α нуль кратности k каждому решению вида $\sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i y_i$, $c_{k+1} \neq 0$. Решению $x \equiv 0$ в α и β (как и в остальных точках), естественно, приписывается нуль кратности ∞. Ясно, что для несингулярных концов обобщенная кратность совпадает с обычной. *Всюду в дальнейшем кратности $\varphi_x\alpha$, $\varphi_x\beta$ понимаются исключительно как обобщенные.*

Таким образом, если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$, то, присоединив к I «несобственные» элементы α, β, мы получаем возможность производить подсчет нулей решений на расширенном промежутке $\overline{I} = [\alpha, \beta]$; такие обозначения, как $\varphi_x J$, $\psi_x J$, $T_0 J$ и т. п., распространяются на $J \subset \overline{I}$ естественным образом. То же относится к полуинтервалам $[\alpha, \beta)$ или $(\alpha, \beta]$, если неосцилляционным является лишь один из концов.

Обобщенная кратность имеет много общего с обычной: $0 \leqslant \varphi_x s \leqslant n-1$ для всех $s \in \overline{I}, x \in \mathfrak{M}'$; при любом $s \in \overline{I}$ совокупность $x \in \mathfrak{M}$ таких, что $\varphi_x s \geqslant r$ $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$, образует в $\mathfrak{M}$ $(n-r)$-мерное подпространство. В обоих случаях величина $\varphi_x s$ характеризует скорость убывания (или роста) решения $x(t)$ при $t \to s$: $\dfrac{x(t)}{y(t)} \to 0$ при $t \to s$ $(x, y \in \mathfrak{M}',\ s \in \overline{I})$ в том и только том случае, если $\varphi_x s > \varphi_y s$. Однако здесь имеется одно существенное различие: в несингулярном случае связь между кратностью и ростом является стандартной, в сингулярном же определяется оператором L. Так, если $L = \dfrac{d^2}{dt^2} - 1$, то $\varphi_{e^t}\infty = 0$, тогда как при $L = \dfrac{d^2}{dt^2} - 3\dfrac{d}{dt} + 2$ $\varphi_{e^t}\infty = 1$.

Вот еще несколько примеров. Для фундаментальной системы $\{x_i\}$, по которой определялся оператор L третьего порядка в 1.2, имеем: $\varphi_{x_1}0 =$

$= \varphi_{x_3}0 = 0, \varphi_{x_2}0 = 1$. Далее, $\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{c}{t^2} \in T_0[0,\infty]$, если $c < 1/4$; однако $\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{1}{4t^2} \notin T_0[0,\infty]$, так как $\varphi_{\sqrt{t}}0 = \varphi_{\sqrt{t}}\infty = 1$. Точно так же $\dfrac{d^2}{dt^2} \notin T_0[-\infty,\infty]$ поскольку $\varphi_1[-\infty,\infty] = 2$. Вообще, *если L — оператор с постоянными коэффициентами, то $L \in T_0[-\infty,\infty]$ в том и только том случае, если все корни характеристического уравнения вещественны и различны* (для $L \in T_0[-\infty,\infty]$ нужна, конечно, лишь вещественность корней). Доказательство этого факта несложно и предоставляется читателю.

2.3.

Лемма 2.2. *Если $x(t)$, $y(t) \in C^m Us (s \in I)$, $\varphi_x s = m$, $\varphi_y s \geqslant m-1$, то при достаточной малости $|\varepsilon|$ имеем $\varphi_{x+\varepsilon y} Us \geqslant m$.*

На этом очевидном замечании основан специфический прием доказательства, который можно было бы назвать «возмущением нулей» и которым мы дважды воспользуемся ниже (см. также [57]).

Лемма 2.3. $T_0(\alpha,\beta) = T_0(\alpha,\beta] = T_0[\alpha,\beta)$.

Из соображений симметрии достаточно проверить, что $T_0(\alpha,\beta) \subset T_0(\alpha,\beta]$. Итак, пусть $L \in T_0 I$ и $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_i$ множество $x \in \mathfrak{M}'$ таких, что $\varphi_x I \geqslant i$, $\varphi_x \beta \geqslant n - i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$; мы должны доказать, что $\mathfrak{M}_i = \varnothing$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Для $i = n$ это верно, так как $L \in T_0 I$. Пусть уже установлено, что $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n-1} = \cdots = \mathfrak{M}_{k+1} = \varnothing$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; покажем, что тогда и $\mathfrak{M}_k = \varnothing$.

Предположим противное: $\mathfrak{M}_k \neq \varnothing$. Пусть $v \in \mathfrak{M}_k$ — решение, максимизирующее $\psi_x I$ по $x \in \mathfrak{M}_k$:

$$r \overset{Df}{=} \psi_v I \geqslant \psi_x I \text{ для всех } x \in \mathfrak{M}_k. \tag{2.3}$$

Поскольку $\mathfrak{M}_{k+1} = \varnothing$, то $\varphi_v I = k$, поэтому $1 \leqslant r \leqslant k$. Пусть $t_i = t_i^v I$, $k_i = \varphi_v t_i$ $(i = 1,2,\ldots,r)$ $(k_1 + \cdots + k_r = k)$. Введем в рассмотрение решение $y \in \mathfrak{M}'$ следующим образом. Пусть вначале $r < k$; подчиним $y(t)$ требованиям

$$\varphi_y t_i \geqslant k_i - 1 \, (i = 1,2,\ldots,r), \tag{2.4}$$

$$\varphi_y \beta \geqslant n - k - 1, \tag{2.5}$$

$$y(s_1) = y(s_2) = \cdots = y(s_r) = 0, \tag{2.6}$$

где s_i — какие-либо точки I, отличные от $t_1, \ldots, t_r$ и друг от друга. Условия (2.4) — (2.6) определяют в $\mathfrak{M}$ подпространство, размерность которого не превышает $n-1$; поэтому выбор соответствующей $y(t) \not\equiv 0$ возможен. Заметим, что (2.5) допускает следующее уточнение:

$$\varphi_y \beta = n - k - 1. \tag{2.7}$$

В самом деле, так как $r < k$, то хотя бы одно из чисел $k_1, \dots, k_r$ больше 1 и, следовательно, в силу (2.4), (2.6) $\psi_y I \geqslant r+1$. С другой стороны, те же соотношения (2.4), (2.6) показывают, что $\varphi_y I \geqslant k$; поэтому неравенство $\varphi_y \beta \geqslant n-k$, означающее, что $y \in \mathfrak{M}_k$, невозможно из-за (2.3).

Мы определили $y(t)$ для случая $r < k$; если же $r = k$ (т. е. если все нули $v(t)$ в I простые), положим $y = x_{k+1}$. Соотношения (2.4), (2.7), а нам только они и понадобятся, выполняются в этом случае тривиальным образом.

Выберем $Ut_1, \dots, Ut_r, U_-\beta$ так, чтобы они попарно не пересекались и $y(t)$ не имела нулей в $U_-\beta$. Положим

$$z(t) = z(t,s) = v(t) - \frac{v(s)}{y(s)} y(t) \quad (s \in U_-\beta).$$

В силу (2.7) $\varphi_v \beta \geqslant n-k > \varphi_y \beta$, так что $\dfrac{v(s)}{y(s)} \to 0\,(s \uparrow \beta)$. Поэтому если s достаточно близко к β, то в соответствии с леммой 2.2 и (2.4)

$$\varphi_z U t_i \geqslant k_i \ \ (i = 1, 2, \dots, r).$$

Кроме того,очевидно, что $z(s) = 0$, откуда $\varphi_z I \geqslant k+1$. Поскольку $\varphi_z \beta = \varphi_y \beta = n-k-1$, то $z \in \mathfrak{M}_{k+1} = \varnothing$. Мы пришли к противоречию.

Ввиду произвольности I лемму 2.3 можно, конечно, сформулировать и так: $T_0(\alpha_1, \beta_1) = T_0(\alpha_1, \beta_1] = T_0[\alpha_1, \beta_1)$ *для любых* $\alpha_1, \beta_1 \in \overline{I} (\alpha_1 < \beta_1)$. На подобных очевидных переформулировках (не содержащих ничего нового, кроме букв) впредь не останавливаемся.

2.4.

Следствие 2.1. *Если* $L \in T_0 I$ *и* $\{x_i\}$ *— ИФС при* $t \uparrow \beta$, *то* $[x; 1 \dots k](t) \neq 0$ *в* $I\,(k = 1, 2, \dots, n-1)$.

Действительно, если $[x; 1 \dots k](t_0) = 0$ для некоторых $k (1 \leqslant k \leqslant n-1)$ и $t_0 \in I$, то система уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i^{(j)}(t_0) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, k-1),$$

имела бы нетривиальное решение $c_1, c_2, \dots, c_k$; тогда для $x = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$ $(\not\equiv 0)$ оказалось бы, что $\varphi_x t_0 \geqslant k$, и, поскольку $\varphi_x \beta \geqslant n-k$, что $\varphi_x (\alpha, \beta] \geqslant \varphi_x [t_0, \beta] \geqslant n$, вопреки лемме 2.3.

Аналогично, *если* $L \in T_0 I$ *и* $\{y_i\}$ *— ИФС при* $t \downarrow \alpha$, *то* $[y; k \dots n] \neq 0$ *в* $I\,(k = 2, 3, \dots, n)$.

Следствие 2.2. *Условие $L \in T_0 I$ необходимо и достаточно для того, чтобы оператор L допускал на I разложение (1.3).*

Необходимость доказана в мемуаре Г. Пойа [1] и, независимо, в более поздней работе Г. Маммана [2], частично пересекающейся с [1]. Конкретный вид множителей $h_i(t)$ в (1.3) определяется формулами [1] (см. также [58])

$$h_0 = \frac{1}{w_1},\ h_i = \frac{w_i^2}{w_{i-1}w_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad h_n = \frac{w_n}{w_{n-1}},$$

где $w_0(t) = 1, w_i(t) = [x; 1 \ldots i]\,(i = 1, 2, \ldots, n), \{x_i\}$ — фундаментальная система решений уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющая условиям

$$[x; 1 \ldots i](t) \neq 0 \text{ в } I \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.8}$$

Существование такой фундаментальной системы («свойство W») эквивалентно, таким образом, возможности разложения (1.3). Отметим, что Г. Маммана записывает разложение L в несколько иной форме,

$$L = \Big(\frac{d}{dt} - g_n\Big)\Big(\frac{d}{dt} - g_{n-1}\Big) \ldots \Big(\frac{d}{dt} - g_1\Big)$$
$$g_i(t) = \frac{\dot{w}_i}{w_i} - \frac{\dot{w}_{i-1}}{w_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $w_i(t)$ имеют прежний смысл; переход от одной формы к другой не составляет труда.

В части, относящейся к достаточности, следствие 2.2 доказано в [1, 2] лишь частично; именно, установлено, что L обладает на I «свойством W» и, следовательно, допускает разложение (1.3), если $L \in T_0[\alpha, \beta)$. Доказывается это в обеих работах одинаково: начальные условия в точке α для $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ выбираются так, чтобы

$$x_i(\alpha) = \dot{x}_i(\alpha) = \cdots = x_i^{(n-i-1)}(\alpha) = 0, \quad x_i^{(n-i)}(\alpha) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

отсюда и из $L \in T_0[\alpha, \beta)$ легко следует (2.8). Этот простой прием применим, очевидно, лишь в случае несингулярности α (или β, поскольку α и β можно поменять ролями). Если же, например, $I = (-\infty, \infty)$, то методика Пойа—Маммана позволяет установить возможность разложения (1.3) на любом полубесконечном промежутке, но не на всей прямой. Поскольку следствие 2.1 не опиралось на несингулярность концов I, то тем самым импликация «$L \in T_0 I \to$ разложение (1.3)» доказана в общем случае.

В связи с этим должна быть упомянута недавняя работа А. И. Перова, где предложен интересный способ доказательства той же импликации, основанный на совершенно иных соображениях, связанных с выпуклостью, и, в частности, на теореме о разделяющей гиперплоскости. Наш способ уступает методу Перова в геометрической наглядности, но зато позволяет попутно установить, что условие (2.8) выполняется, в частности, для ИФС при $t \uparrow \beta$ (или $t \downarrow \alpha$, при соответствующей перенумерации); для дальнейшего это весьма существенно.

По поводу факторизации конечноразностных операторов см. [59].

2.5. Хотя следствие 2.1 оказалось достаточным для выяснения возможности разложения Пойа—Маммана, в других отношениях бывает важно знать знаки $[x;\, 1\dots k]$ и прочих вронскианов, связанных с ИФС. Прежде чем перейти к этому вопросу, напомним два известных факта.

Лемма 2.4 (см., например, [58]). *Справедлива формула*

$$\frac{d}{dt}\frac{[u;\, 1\dots k+1\backslash k]}{[u;\, 1\dots k]} = \frac{[u;\, 1\dots k-1][u;\, 1\dots k+1]}{[u;\, 1\dots k]^2} \tag{2.9}$$

при всех t, где правая часть определена (т. е. где $u_1, \dots, u_{k+1}$ k-кратно дифференцируемы и $[u; 1\dots k](t) \neq 0$).

Лемма 2.5 (М. Фекете [60]). *Если положительны все миноры вида*

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ l & l+1 & \dots & l+k-2 & l+k-1 \end{pmatrix}$$
$$(k = 1, 2, \dots, n;\ l = 1, 2, \dots, m-k+1)$$

некоторой $n \times m$-матрицы $A\,(n \leqslant m)$, то положительны и все миноры вида

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ i_l & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix}$$
$$(1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n).$$

Строки и столбцы можно, конечно, поменять ролями. Доказательство леммы Фекете можно найти также в монографии [33] (стр. 306-307).

2.6. Следующее предложение послужит весьма полезным инструментом в дальнейших рассмотрениях.

Лемма 2.6. *Пусть функции $u_i(t) \in C_*^{m-2}I$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ $(m \geqslant 2)$ таковы, что*

$$u_1 \lll u_2 \lll \dots \lll u_m (t \uparrow \beta), \tag{2.10}$$
$$[u;\, 1\dots m]\,(t) \text{ *знакопостоянна в* } I \tag{2.11}$$

и для некоторого r $(1 \leqslant r \leqslant m)$

$$\forall k\ (1 \leqslant k \leqslant m)\ [u; 1 \dots k \backslash r](t) \neq 0 \ \text{на}\ I. \tag{2.12}$$

Тогда

$$[u; 1 \dots m](t) \geqslant 0 \text{ на } I, \tag{2.13}$$

$$\forall k\ (1 \leqslant k \leqslant m-1)\ [u; 1 \dots k](t) > 0 \ \text{на}\ I \tag{2.14}$$

и для любого возрастающего набора индексов $(1 \leqslant)\, i_1 < i_2 < \dots < i_k\, (\leqslant m)$, *где* $k \leqslant m-1$,

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}](t) > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.15}$$

Будем доказывать лемму индукцией по m. Так как при $m = 2$ она тривиальна, считаем ее уже доказанной для систем, содержащих $m-1$ функций.

Отметим вначале, что

$$[u; 1 \dots m] \not\equiv 0 \text{ в любой } U_-\beta. \tag{2.16}$$

Действительно, в противном случае оказалось бы $L_r u_r \equiv 0$ вблизи β, где L_r — оператор, отвечающий фундаментальной системе $u_1, \dots, u_{r-1}$, $u_{r+1}, \dots, u_m$. Но вытекающая отсюда линейная зависимость $u_1, \dots, u_m$ вблизи β, очевидно, несовместима с (2.10).

Нашей ближайшей целью является доказательство соотношения:

$$\text{если } r < m, \text{ то } v(t) \overset{Df}{=} \frac{[u; 1 \dots m-1]}{[u; 1 \dots m \backslash r]} \to 0 \qquad (t \uparrow \beta). \tag{2.17}$$

Так как $[u;\, 1 \dots m \backslash r] \neq 0$ в I, то $v(t)$ абсолютно непрерывна в I и, в соответствии с (2.9),

$$\dot v = -\frac{[u; 1 \dots m-1 \backslash r][u; 1 \dots m]}{[u; 1 \dots m \backslash r]^2} \quad (r < m). \tag{2.18}$$

Ввиду (2.11) и (2.12) правая часть знакопостоянна на I, так что $v(t)$ (нестрого) монотонна в I. Предположим, что (2.17) не выполнено; тогда при $t \uparrow \beta$ $v(t)$ стремится к ненулевому пределу (конечному или бесконечному). Пусть постоянная c совпадает по знаку с числителем $v(t)$ вблизи β и достаточно велика по абсолютной величине; тогда

$$[u;\, 1 \dots m \backslash r] - c[u;\, 1 \dots m-1] < 0 \text{ в некоторой } U_-\beta. \tag{2.19}$$

Определим систему функций $\{u_i'\}$ следующим образом:

$$u'_1 = u_1, \dots, u'_{r-1} = u_{r-1}; u'_r = u_{r+1}, \dots, u'_{m-2} = u_{m-1},$$
$$u'_{m-1} = u_m + (-1)^{m-r} c u_r. \tag{2.20}$$

Неравенство (2.19) перепишется теперь в виде

$$[u'; 1 \dots m-1] < 0 \text{ в некоторой } U_-\beta. \tag{2.21}$$

Очевидно, $u'_1 \lll u'_2 \lll \dots \lll u'_{m-1}(t \uparrow \beta)$; сопоставляя это с (2.12), (2.21), видим, что система (2.20) удовлетворяет на интервале $I' = U_-\beta$ всем условиям леммы (с заменой m и r на $m-1$). Отсюда согласно предположению индукции вытекает, что $[u'; 1 \dots m-1] \geqslant 0$ в $U_-\beta$. Полученное противоречие с (2.21) доказывает (2.17).

В силу (2.16) и (2.18) $v \not\equiv 0$ в любой $U_-\beta$. Учитывая (2.17) и (нестрогую) монотонность v на I, заключаем, что v строго знакопостоянна в I, т. е.

$$[u; 1 \dots m-1] \neq 0 \;\text{ в }\; I. \tag{2.22}$$

Мы доказали (2.22) для случая $r < m$; если же $r = m$, то (2.22), конечно, не нуждается в доказательстве, так как содержится в предпосылке (2.12).

Соотношения (2.12) и (2.22) показывают, что система $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ попадает в сферу действия индуктивного предположения (с тем же r, если $r < m$; при $r = m$ в качестве нового r здесь можно выбрать $m-1$). Поэтому справедливы неравенства (2.14) (строгое знакопостоянство $[u; 1 \dots m-1]$ вытекает из (2.22)) и

$$\forall k, l \ (1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m-1) \ [u; k \dots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.23}$$

В частности,

$$\forall l \ (2 \leqslant l \leqslant m-1) \ [u; 2 \dots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.24}$$

Следующим этапом будет проверка неравенства

$$[u; 2 \dots m] \neq 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.25}$$

Если $r = 1$, оно не нуждается в доказательстве ввиду (2.12). Пусть $r > 1$; по той же формуле (2.9)

$$\frac{d}{dt}\frac{[u; 2 \dots m]}{[u; 1 \dots m-1]} = \frac{[u; 2 \dots m-1][u; 1 \dots m]}{[u; 1 \dots m-1]^2}. \tag{2.26}$$

Правая часть знакопостоянна вблизи β в силу (2.11), (2.24) и притом, согласно (2.16), не обращается в тождественный нуль ни в какой $U_-\beta$. Отсюда вытекает, что дифференцируемое отношение, будучи в соответствии с (2.22) абсолютно непрерывной в I функцией, (нестрого) монотонно, а следовательно, строго знакопостоянно вблизи β. Итак, (2.25) доказано.

Соотношения (2.24) и (2.25) показывают, что система $\{u''_i\}$, которую определим равенствами $u''_i = u_{i+1}$ $i = 1, 2, \dots, m-1$, удовлетворяет условиям леммы (с заменой m и r на $m-1$) на некотором интервале $I'' = U_-\beta$.

Отсюда, в соответствии с предположением индукции и неравенством (2.25),

$$\forall k, l\ (2 \leqslant k \leqslant l \leqslant m)\ [u; k \ldots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.27}$$

Сопоставление (2.23) и (2.27) дает

$$\forall k, l\ (0 \leqslant l - k \leqslant m - 2)\ [u; k \ldots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.28}$$

Лемма Фекете, отнесенная к $(m-1)\times m$-матрице $\|u_j^{(i)}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m-2;$ $j = 1, 2, \ldots, m)$, показывает, что из (2.28) вытекают неравенства (2.15).

Наши несколько утомительные манипуляции приближаются к концу: осталось доказать лишь (2.13). В случае $r < m$ (2.13) непосредственно усматривается из (2.15), (2.17) и (2.18): из (2.15) следует, что $v > 0$ в I, поэтому $\dot{v} \leqslant 0$ вблизи β в силу (2.17) и монотонности v вблизи β. В случае же $r = m$ заметим следующее обстоятельство: в силу (2.24) найдется такая $U_-\beta$, что условия леммы остаются выполненными для системы $u_1, u_2, \ldots, u_m$, если заменить I на $I' = U_-\beta$ и $r = m$ на $r' = 1$. Поэтому согласно сказанному выше (2.13) справедливо вблизи β; но отсюда, учитывая (2.11) и (2.16), заключаем, что оно справедливо и на всем I.

При переформулировке леммы на случай $t \downarrow \alpha$ следует заменить β на α, (2.10) — на условие «$u_1 \ggg \ldots \ggg u_m (t \downarrow \alpha)$», $[u; 1 \ldots k \backslash r]$ в (2.12) — на $[u; k \ldots m \backslash r]$ и, наконец, (2.14) — на неравенство

$$\forall k\ (2 \leqslant k \leqslant m)\ [u;\ k \ldots m](t) > 0 \text{ на } I.$$

2.7. Следующее предложение частично носит итоговый характер.

Теорема 2.1 (об иерархии). *Пусть $L \in T_0 I$. Тогда уравнение $Lx = 0$ обладает иерархическими фундаментальными системами решений $\{x_i\}$ при $t \uparrow \beta$, т. е. системами решений $\{x_i\}$, удовлетворяющими соотношению (2.1). Каждая ИФС при $t \uparrow \beta$ обладает следующими свойствами:*

а) $[x; 1 \ldots k](t) > 0$ в I $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

б) для любого возрастающего набора индексов $(1 \leqslant)\, i_1 < i_2 < \cdots < i_k\, (\leqslant n)$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}](t) > 0 \text{ вблизи } \beta\ (1 \leqslant k \leqslant n);$$

в) если $\{i_s\}$ и $\{j_s\}$ $(s = 1, 2, \ldots, k; 1 \leqslant k \leqslant n-1)$ — два различных возрастающих набора индексов, причем $i_s \leqslant j_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, то

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}](t) \lll [x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}](t)\ (t \uparrow \beta). \tag{2.29}$$

Для случая $t \downarrow \alpha$ β заменяется на α, (2.1) — на «$x_1 \ggg \ldots \ggg x_n$ $(t \downarrow \alpha)$» и $[x; 1 \ldots k]$ в а) — на $[x; k \ldots n]$.

Содержание теоремы, за исключением утверждения в), обосновано выше; в частности, для получения б) достаточно сопоставить следствие 2.1 и лемму 2.6 (при $m = r = n$).

Докажем в). Заметим прежде всего, что от $\{i_s\}$ к $\{j_s\}$ можно перейти, увеличивая на каждом шаге лишь один из индексов, причем все промежуточные наборы индексов также будут возрастающими (i_k заменяется на j_k, затем i_{k-1} на j_{k-1} и т.д.). Это позволяет ввиду транзитивности отношения «$\lll$» ограничиться случаем

$$\exists\, r \ (1 \leqslant r \leqslant k) \ \bigl\{ i_r < j_r;\ i_s = j_s \text{ при всех } s \neq r \bigr\}. \tag{2.30}$$

Теперь появляется возможность воспользоваться эффективным приемом, подобный которому уже применялся при доказательстве леммы 2.6. Именно, так как $i_r < j_r$, то, каково бы ни было число c, система

$$x_1, \ldots, x_{j_r - 1}, x'_{j_r}, x_{j_r + 1}, \ldots, x_n, \text{ где } x'_{j_r} = x_{j_r} - c x_{i_r},$$

является ИФС при $t \uparrow \beta$. Поэтому согласно б)

$$[x_{j_1}, \ldots, x_{j_r - 1}, x'_{j_r}, x_{j_r + 1}, \ldots, x_{j_k}] = [x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}] - c[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] > 0 \text{ вблизи } \beta$$

Поскольку c произвольно велико, это доказывает (2.29).

Теорема 2.1 достаточно полно описывает поведение решений в окрестности неосцилляционного конца. Она показывает, в частности, что «иерархия» распространяется не только на решения, но и на их производные, правда, лишь в специфической форме (2.29), связанной с вронскианами; утверждение «$|x_i^{(k)}| \lll |x_j^{(k)}|$ при $i < j$ $(t \uparrow \beta \neq \underline{\beta})$» было бы некорректным при $k > 0$ уже по той причине, что, как показывают простые примеры, $x_i^{(k)}(t)$ могут колебаться при $t \uparrow \beta (\neq \underline{\beta})$.

Как уже отмечалось, для существования системы решений $\{x_i\}$, удовлетворяющей условию (2.1), достаточно лишь того, чтобы решения не колебались при $t \uparrow \beta$; в то же время для а), б), в) предположения о неосцилляции — $L \in T_0 I$ для а), $\underline{\beta} \neq \beta$ для б) и в), являются, конечно, необходимыми. Так, возвращаясь к уравнению третьего порядка, рассмотренному в 1.2, имеем $x_1 \lll x_2 \lll x_3$ при $t \to \infty \, (= \infty)$, причем вронскиан $[x_1, x_2] = t^{-1/2}/2 + \cos t$ колеблется при $t \to \infty$.

Нетрудно видеть, что неравенства типа (2.29) имеют место и в условиях леммы 2.6; доказательство вполне аналогично. Отметим еще, что для теоремы об иерархии был использован лишь частный случай $r = m$ леммы 2.6; при этом условие (2.11) и требование гладкости выполнялись, так сказать, «с запасом». Однако позднее, в § 5, лемма 2.6 понадобится нам в большей общности.

В заключение остановимся на одной переформулировке утверждения б). Говорят (см. [58]), что система функций $u_i(t) \in C_*^{m-1}J$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяет правилу Декарта на J, или, короче, является *декартовой* на J, если для любой нетривиальной линейной комбинации $u = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$ величина $\varphi_u J$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Как показано в [58], для этого необходимо и достаточно, чтобы при любом k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ все вронскианы вида

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}] \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m) \tag{2.31}$$

имели на J один и тот же строгий знак, зависящий лишь от k (в [58] предполагается, что J — интервал, но это несущественно). Если при всех k вронскианы (2.31) положительны на J, естественно называть систему $\{u_i\}$ $(+)$-*декартовой* на J; таким образом, $(+)$-декартовы системы образуют подкласс декартовых. Утверждение б) теоремы 2.1 можно теперь сформулировать так: *любая ИФС при $t \uparrow \beta (t \downarrow \alpha)$ является $(+)$-декартовой вблизи $\beta(\alpha)$.*

§ 3. Некоторые вопросы распределения нулей

Здесь, опираясь на изложенное в части § 2, мы установим некоторые закономерности распределения нулей решений уравнения $L(x) = 0$ в расширенном промежутке $\bar{I} = [\alpha, \beta]$, который, если $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$, снабжается топологией расширенной числовой прямой. Обычно не будет предполагаться, что $L \in T_0 I$; поэтому рассмотрения настоящего параграфа, по сравнению с предыдущим, носят несколько более «глобальный» характер.

3.1.

Лемма 3.1. *Пусть при $k \to \infty$ $x_k(t) \to x(t)$ в $\mathfrak{M}$ $(x_k,\, x \in \mathfrak{M}')$, $a_k,\, b_k \to \tau$ $(\alpha \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant \beta)$.*

Если $\tau \in I$ или τ — неосцилляционный конец I, то

$$\varphi_x \tau \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \varphi_{x_k}[a_k, b_k]. \tag{3.1}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\varphi_{x_k}[a_k, b_k] \geqslant m \overset{D_f}{=} \min\{n, \overline{\lim_{k\to\infty}} \varphi_{x_k}[a_k, b_k]\} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.2}$$

Мы покажем, что $\varphi_x \tau \geqslant m$; поскольку $x \not\equiv 0$, отсюда будет следовать, что $m < n$, т.е. что m совпадает с правой частью (3.1).

В случае $\tau \in I$ это достигается стандартным рассуждением, основанным на теореме Ролля. Именно, в силу (3.2) найдутся точки $\tau_k^i \in [a_k, b_k]$ такие, что

$$\forall i \ (0 \leqslant i \leqslant m-1) x_k^{(i)}(\tau_k^i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

(гладкость x_k достаточна для применимости теоремы Ролля, так как $m \leqslant n$). Поскольку $a_k, b_k \to \tau$, то

$$\tau_k^i \to \tau \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \qquad (k \to \infty). \tag{3.4}$$

Хорошо известно, что сходимость решений в n-мерном пространстве $\mathfrak{M}$ влечет за собой их сходимость в $C^{n-1}J$ для любого отрезка $J \subset I$. Заключая точку τ внутрь такого отрезка J и учитывая равномерную на J сходимость $x_k^{(i)}(t)$ к $x^{(i)}(t)$, переходим в (3.3), (3.4) к пределу: $x(\tau) = \ldots = x^{(m-1)}(\tau) = 0$.

Пусть теперь τ совпадает с одним из неосцилляционных концов I, для определенности, скажем, с β ($\neq \underline{\beta}$). В случае сингулярности β (представляющем, конечно, основной интерес) приведенное рассуждение неприменимо; основным инструментом теперь будет служить теорема 2.1.

Положим $s = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \varphi_{x_k} \beta$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\forall k \ \varphi_{x_k} \beta = s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant m-1 \tag{3.5}$$

(случай $s = m$ тривиален ввиду замкнутости соответствующего $(n-m)$-мерного подпространства). Ясно, что $\varphi_x \beta \geqslant s$. Таким образом, если $\{y_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$, то

$$x_k = \sum_{i=1}^{n-s} c_{ik} y_i \qquad (k = 1, 2 \ldots), \qquad x = \sum_{i=1}^{n-s} c_i y_i, \tag{3.6}$$

$$c_{ik} \to c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-s) \qquad (k \to \infty). \tag{3.7}$$

Требуемое утверждение $\varphi_x \beta \geqslant m$ эквивалентно обращению в нуль коэффициентов $c_{n-m+1}, c_{n-m+2}, \ldots, c_{n-s}$; иначе это можно записать в виде

$$r \leqslant n - m, \tag{3.8}$$

где r — наибольший из индексов ненулевых c_i $(i = 1, 2, \ldots, n-s)$ $(1 \leqslant r \leqslant n-s)$. Согласно (3.7)

$$c_{rk} \to c_r \neq 0, \quad c_{ik} \to 0, \quad \text{при} \quad i > r \quad (k \to \infty). \tag{3.9}$$

Для произвольного k, учитывая (3.6), находим

$$[x_k, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{n-s}] = c_{rk}[y; r, \ldots, n-s] + \\ + \sum_{i=1}^{r-1} c_{ik} [y_i, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{n-s}]. \tag{3.10}$$

По теореме об иерархии

$$[y_i, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{n-s}] \lll [y; r, \ldots, n-s] \quad (t \uparrow \beta)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Это вместе с (3.9) позволяет сделать из (3.10) следующий вывод: существует U_β такая, что для всех достаточно больших k

$$c_r[x_k, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{n-s}] > 0 \quad \text{в} \quad U\_\beta \quad (k \geqslant k_0). \tag{3.11}$$

Согласно той же теореме 2.1

$$[y; i \ldots n-s] > 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta \quad (i = r+1,\, r+2, \ldots, n-s). \tag{3.12}$$

Пусть (t_0, β) — интервал, в котором неравенства (3.11), (3.12) выполняются одновременно. Это означает, что система функций $x_k, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{n-s}$ является строго чебышёвской на (t_0, β), поэтому

$$\varphi_{x_k}(t_0, \beta) \leqslant n - s - r \quad (k \geqslant k_0). \tag{3.13}$$

С другой стороны, так как $a_k \to \beta$ $(k \to \infty)$, то $[a_k, b_k] \subset (t_0, \beta]$ при достаточно больших k, откуда с учетом (3.2) и (3.5) следует

$$\varphi_{x_k}(t_0, \beta) \geqslant \varphi_{x_k}[a_k, b_k] - \varphi_{x_k}\beta \geqslant m - s \quad (k \geqslant k_1). \tag{3.14}$$

Сопоставление (3.13) и (3.14) дает (3.8).

Итак, можно сказать, что при приближении к неосцилляционному концу обычные нули переходят в пределе в обобщенные нули соответствующей кратности; введение последних тем самым вполне оправдано.

3.2. Доказанное утверждение нетрудно теперь обобщить следующим образом.

Теорема 3.1 (о неисчезновении нулей). *Пусть при* $k \to \infty$ $x_k(t) \to x(t)$ *в* $\mathfrak{M}(x_k, x \in \mathfrak{M}')$, $a_k \to a, b_k \to b$ $(\alpha \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant \beta)$. *Если каждая из точек* a, b *принадлежит* I *либо является неосцилляционным концом* I, *то*

$$\varphi_x[a, b] \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \varphi_{x_k}[a_k, b_k]. \tag{3.15}$$

Обозначим правую часть (3.15), если она конечна, через m; в противном случае пусть m — произвольно большое натуральное число. Теорема будет доказана, если мы убедимся, что

$$\varphi_x[a, b] \geqslant m; \tag{3.16}$$

в самом деле, это исключает вторую из упомянутых возможностей (так как $\varphi_x[a,b] < \infty$), поэтому m должно совпадать с правой частью (3.15).

Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_{x_k}[a_k,b_k] \geqslant m$ при всех k, и ввиду компактности m-мерного куба, что при $k \to \infty$

$$t^i_{x_k}[a_k,b_k] \to t^i \quad (i=1,2,\ldots,m) \quad (a \leqslant t^1 \leqslant t^2 \leqslant \ldots \leqslant t^m \leqslant b).$$

Среди точек t^i могут быть совпадающие; разобьем их на соответствующие группы: $t^1 = t^2 = \ldots = t^{s_1} < t^{s_1+1} = t^{s_1+2} = \ldots = t^{s_2} < \ldots < t^{s_r+1} = = t^{s_r+2} = \ldots = t^m \quad (1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_r < m)$. В силу леммы 3.1

$$\varphi_x t^{s_i} \geqslant s_i - s_{i-1} \quad (i=1,2,\ldots,r+1)\ (s_0 = 0, s_{r+1} = m),$$

что после суммирования по i дает (3.16).

Попутно проверен следующий (впрочем, почти очевидный) факт: *если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$, то величины $\varphi_x I$ равномерно ограничены по всем $x \in \mathfrak{M}'$.* Действительно, в противном случае нашлись бы $x_k \in \mathfrak{M}'$ $(k = 1,2,\ldots)$ такие, что $\varphi_{x_k} I \to \infty$ $(k \to \infty)$. Так как x_k могут быть нормированы в $\mathfrak{M}$, то ввиду конечномерности $\mathfrak{M}$ можно считать, что $x_k \to x \in \mathfrak{M}'$ при $k \to \infty$; тем самым мы оказались в условиях теоремы 3.1 (с $a_k = \alpha, b_k = \beta$ при всех k), причем правая часть (3.15) бесконечна, что невозможно.

Условие неосцилляционности в формулировке теоремы 3.1, разумеется, не может быть отброшено, так как без него «исчезновение» нулей вполне возможно. Пример:

$$L = \frac{d^4}{dt^4} - 1, \quad I = (-\infty,\infty), \quad x_k = e^{-t} + \frac{1}{k}\sin t \to e^{-t}\ (k \to \infty).$$

3.3. Рассмотрения этого пункта содержательны лишь при $L \notin T_0 I$, что здесь и предполагается. Сейчас мы введем в рассмотрение сопряженные к t справа и слева точки $\overline{t}$, $\underline{t}$. Предпошлем этому соглашение, относящееся к обозначению $T_0 s$ $(= T_0[s,s])$. Поскольку обобщенные кратности, как и обычные, не превосходят $n-1$ (для $x \in \mathfrak{M}'$), то соотношение $L \in T_0\alpha$ $(L \in T_0\beta)$ имеет место, если α (β) является неосцилляционным концом; в противном случае будет удобно считать, что $L \notin T_0\alpha$ $(L \notin T_0\beta)$; это чисто формальное соглашение, поскольку смысл выражений $T_0\alpha$, $T_0\beta$ определен лишь для неосцилляционных случаев.

Точка $\overline{t}(\in \overline{I})$ определяется для любого $t \in \overline{I}$, при котором $L \notin T_0[t,\beta]$ соотношением

$$\overline{t} = \text{infimum}\ \ s \in [t,\beta] \quad \textit{таких, что} \quad L \notin T_0[t,s].$$

Аналогично, для любого $t \in \overline{I}$, при котором $L \notin T_0[\alpha,t]$, полагаем

$$\underline{t} = \text{supremum}\ \ s \in [\alpha,t] \quad \textit{таких, что} \quad L \notin T_0[s,t].$$

Таким образом, в случае $L \in T_0[t, \beta]$ $\overline{t}$ не определена; это же относится и к $\underline{t}$, если $L \in T_0[\alpha, t]$. Тот факт, что $\overline{t}$ определена (не определена), будем записывать в виде $\overline{t} \in \overline{I}$ ($\overline{t} \notin \overline{I}$); аналогичный смысл вкладывается в соотношения $\underline{t} \in \overline{I}$, $\underline{t} \notin \overline{I}$ (точки вне $\overline{I}$ для нас, так сказать, «не существуют»).

Ясно, что введенные ранее записи $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} = \beta$, $\underline{\beta} \neq \beta$ согласуются с данными определениями $\overline{t}$, $\underline{t}$; следует лишь отметить, что указывающие на неосцилляционность записи $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$ не предполагают, что $\overline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ определены, и понимаются, таким образом, лишь как отрицания соотношений $\overline{\alpha} = \alpha$, $\underline{\beta} = \beta$ соответственно.

Покончив с необходимыми формальностями, приступим к изучению свойств $\overline{t}$, $\underline{t}$ как функций t. Начнем с простейшего.

Лемма 3.2. *Если $t \in I$, $\overline{t} \in \overline{I}$, то $t < \overline{t}$; аналогично, если $t \in I$, $\underline{t} \in \overline{I}$, то $\underline{t} < t$.*

Это замечание почти очевидно; поскольку $L \in T_0 t$ для любого $t \in I$, оно вытекает, например, из следующего, более содержательного предложения

Лемма 3.3. *Если $t, \overline{t} \in \overline{I}$, то $L \notin T_0[t, \overline{t}]$; точно так же $L \notin T_0[\underline{t}, t]$ для любых $t, \underline{t} \in \overline{I}$.*

Из соображений симметрии достаточно доказать первое из утверждений леммы 3.3. Оно сводится к тавтологии, если $t = \alpha = \overline{\alpha}$ или $t = \beta = \underline{\beta}$ (ввиду соглашения выше), а также при $t < \overline{t} = \beta$ (в силу определения $\overline{t}$); эти тривиальные случаи можно, таким образом, исключить из рассмотрения. Согласно определению $\overline{t}$ найдутся t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ такие, что $t_k \downarrow \overline{t}$ при $k \to \infty$ и $L \notin T_0[t, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Пусть $x_k \in \mathfrak{N}[t, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Без ограничения общности можно считать последовательность $\{x_k\}$ нормированной в $\mathfrak{M}$ и, ввиду компактности единичной сферы в $\mathfrak{M}$, — сходящейся к некоторому $x \in \mathfrak{M}'$. В силу теоремы 3.1 $x \in \mathfrak{N}[t, \overline{t}]$. Лемма доказана.

Теперь легко найти области определения $\overline{t}, \underline{t}$ в «явном» виде:

$$t \in [\alpha, \underline{\beta}] \leftrightarrow \overline{t} \in \overline{I}, \qquad t \in [\overline{\alpha}, \beta] \leftrightarrow \underline{t} \in \overline{I}. \tag{3.17}$$

Первое из этих соотношений немедленно вытекает из $L \notin T_0[\underline{\beta}, \beta]$, $L \in T_0(\underline{\beta}, \beta]$, а второе — из $L \notin T_0[\alpha, \overline{\alpha}]$, $L \in T_0[\alpha, \overline{\alpha})$.

Лемма 3.4. *$\overline{t}, \underline{t}$ как функции t строго возрастают.*

Покажем, что $\overline{t}$ строго возрастает в своей области определения $[\alpha, \underline{\beta}]$ (для $\underline{t}$ рассуждение аналогично). Пусть $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \underline{\beta}$; тогда, очевидно, $\overline{t_1} \leqslant \overline{t_2}$. Менее тривиальное строгое неравенство $\overline{t_1} < \overline{t_2}$ доказывается от противного с помощью леммы 2.3. Предположим, что $\overline{t_1} = \overline{t_2}$; к противоречию ведет следующая цепочка соотношений, основанных на леммах 2.3 и 3.3:

$$L \in T_0[t_1, \overline{t_1}) = T_0(t_1, \overline{t_1}] = T_0(t_1, \overline{t_2}] \subset T_0[t_2, \overline{t_2}] \not\ni L$$

(это рассуждение корректно, очевидно, и при $t_2 = \beta = \underline{\beta}$).

Лемма 3.5. *$\overline{t}$ и $\underline{t}$ как функции t являются обратными: $\overline{a} = b \leftrightarrow a = \underline{b}$ для любых $a, b \in \overline{I}$.*

Проверим, например, импликацию $\overline{a} = b \to a = \underline{b}$. Пусть $\overline{a} = b$; тогда согласно лемме 3.3 $L \notin T_0[a, b]$ и, следовательно, $a \leqslant \underline{b} \in \overline{I}$. Но неравенство $a < \underline{b}$ невозможно, ибо в силу леммы 2.3 оно повлекло бы за собой соотношения $L \notin T_0(a, b] = T_0[a, \overline{a}) \ni L$.

Итак, показано, что «$\overline{\underline{t}} \equiv t$»; эта запись леммы 3.5 является лаконичной, но несколько условной (так как не содержит указаний на допустимый промежуток для t и порядок «сопряжений»).

Леммы 3.4 и 3.5 вместе с (3.17) показывают, что $t \to \overline{t}$ есть взаимно однозначное, монотонное, а следовательно, и непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \underline{\beta}]$ на отрезок $[\overline{\alpha}, \beta]$; обратное отображение $t \to \underline{t}$ обладает, конечно, аналогичными свойствами. Итак, установлена следующая

Теорема 3.2. *Отображение $t \to \overline{t}$ есть возрастающий гомеоморфизм $[\alpha, \underline{\beta}]$ на $[\overline{\alpha}, \beta]$, обратный к которому дается отображением $t \to \underline{t}$.*

Отрезки $[\alpha, \underline{\beta}]$, $[\overline{\alpha}, \beta]$ непусты ввиду сделанного выше предположения $L \notin T_0\overline{I}$; если усилить его до $L \notin T_0 I$, то тем самым будет исключена также возможность вырождения каждого из этих отрезков в точку(α и β соответственно).

3.4. Естественным является вопрос об эффективном отыскании $\overline{a}$ или $\underline{a}$ для заданной точки $a \in \overline{I}$, если известны решения уравнения $Lx = 0$. В несингулярном случае это делается с помощью хорошо известного способа, непосредственно вытекающего из результатов работ [1, 2]. Покажем, как следует модифицировать соответствующую процедуру, чтобы распространить ее на расширенный промежуток $\overline{I}$ с, вообще говоря, сингулярными концами.

Итак, пусть известна фундаментальная система решений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ уравнения $Lz = 0$. Естественно считать, что над каждой «известной» функцией $u(t)$ мы в состоянии производить, наряду с элементарными, такие операции, как например: выяснить, существует ли, и если существует, вычислить предел (конечный или бесконечный) $u(t)$ при $t \to s$ $(s \in \overline{I})$; выяснить, строго знакопостоянна ли $u(t)$ на s_1, s_2 $(s_1, s_2 \in \overline{I})$, колеблется ли $u(t)$ при $t \downarrow s_1$ и если ни то, ни другое, — определить $t_u^1(s_1, s_2)$. Покажем, что задача сводится к конечному числу подобных операций. Для определенности опишем схему нахождения $\overline{\alpha}$ (это не ограничивает общности; см. ниже). Алгоритм состоит из нескольких этапов.

1°. Выясняем, существует ли у $Lx = 0$ фундаментальная система решений $\{x_i\}$ такая, что

$$x_1 \ggcurly x_2 \ggcurly \ldots \ggcurly x_n \qquad (t \downarrow \alpha), \tag{3.18}$$

и находим ее, если она существует. Для этой цели, исходя из системы $\{z_i\}$, будем строить систему $\{x_i\}$ с помощью процесса «иерархизации», на котором основывалось доказательство леммы 2.1. Легко видеть, что этот алгоритм состоит из конечного числа выполнимых операций. Возможны два случая:

а) процесс оборвется, не достигнув цели, из-за того, что мы натолкнемся на решение $z \in \mathfrak{M}'$, колеблющееся при $t \downarrow \alpha$, либо на пару решений $z', z'' \in \mathfrak{M}'$, отношение которых не имеет (конечного или бесконечного) предела при $t \downarrow \alpha$. В том и другом случае уравнение $Lx = 0$ обладает колеблющимися при $t \downarrow \alpha$ решениями, поэтому $\overline{\alpha} = \alpha$;

б) построение системы (3.18) будет беспрепятственно доведено до конца; см. 2°.

2°. Образуем из найденных функций x_i вронскианы

$$w_k(t) = [x, k \ldots n](t) \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{3.19}$$

Ясно, что $w_k \not\equiv 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$. Снова имеются две возможности:

а) хотя бы одна из функций $w_2, w_3, \ldots, w_n$ колеблется при $t \downarrow \alpha$; в этом случае опять-таки $\overline{\alpha} = \alpha$;

б) $w_k \neq 0$ вблизи $\alpha \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$; см. 3°.

3°. В случае 2°, б) согласно результатам части § 2 $\overline{\alpha} \neq \alpha$ и $w_k > 0$ вблизи α ($k{=}2, 3, \ldots, n$). Пусть K — совокупность индексов k ($2{\leqslant}k{\leqslant}n$), для которых $\varphi_{w_k} I \geqslant 1$. Очередное разветвление таково:

а) $K \neq \varnothing$. Тогда

$$\overline{\alpha} = \min_{k \in K} t^1_{w_k} I; \tag{3.20}$$

б) $K = \varnothing$, т. е. все w_k положительны в I; см. 4°.

4°. Поскольку в случае 3° б), очевидно, $L \in T_0 I$, то осталось лишь выбрать между двумя возможностями: $\overline{\alpha} = \beta$ и $\overline{\alpha} \notin \overline{I}$. С помощью «иерархизации» построим ИФС $\{y_i\}$ при $t \uparrow \beta$; это заведомо осуществимо, так как $\underline{\beta} \neq \beta$. Положим

$$\widetilde{w}_k(t) = [y, k \ldots n](t) \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{3.21}$$

Если хотя бы для одного $k (2 \leqslant k \leqslant n)$

$$w_k \llcurly \widetilde{w}_k \qquad t \uparrow \beta, \tag{3.22}$$

то $\overline{\alpha} = \beta$; в противном случае $\overline{\alpha} \notin \overline{I}$.

В обосновании нуждаются лишь этапы 3° и 4°, особенно последний. Начнем с 3°. Обозначим правую часть (3.20) через τ; так как все w_k положительны в (α, τ), то $L \in T_0(\alpha, \tau)$. Для доказательства равенства $\overline{\alpha} = \tau$ достаточно поэтому убедиться, что $L \notin T_0(\alpha, \tau)$. Пусть i — минимизирующий индекс в (3.20): $\tau = t^1_{w_i} I$. Найдется нетривиальная линейная комбинация $x = c_i x_i + \ldots + c_n x_n$ такая, что $\varphi_x \tau \geqslant n - i + 1$, поскольку определитель соответствующей однородной системы уравнений для $c_i, \ldots, c_n$ есть $w_i(\tau) = 0$. С другой стороны, $\varphi_x \alpha \geqslant i - 1$, поэтому $\varphi_x [\alpha, \tau] \geqslant n$ и, следовательно, $L \notin T_0[\alpha, \tau]$.

Переходя к 4°, разложим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по базису $\{y_j\}$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначая через C матрицу $\|c_{ij}\|_1^n$, находим для произвольного k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ по формуле Бине—Коши

$$w_k = \sum C \begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-k+1} \end{pmatrix} [y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n-k+1}}],$$

где суммирование производится по всевозможным возрастающим наборам индексов $(1 \leqslant)\, i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k+1}\, (\leqslant n)$. Отсюда согласно теореме об иерархии

$$w_k = C \begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & n \end{pmatrix} \widetilde{w}_k + o(\widetilde{w}_k) \qquad (t \uparrow \beta).$$

Соотношение (3.22) эквивалентно, таким образом, равенству

$$C \begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & n \end{pmatrix} = 0. \tag{3.23}$$

В свою очередь (3.23) равнозначно существованию линейной комбинации $x = d_k x_k + \ldots + d_n x_n (\not\equiv 0)$ такой, что $\varphi_x \beta \geqslant n - k + 1$ (в левой части (3.23) стоит определитель соответствующей однородной системы уравнений для $d_k, \ldots, d_n$.) Итак, (3.22) эквивалентно следующему утверждению:

$$\exists k, x \; (2 \leqslant k \leqslant n, x \in \mathfrak{M}') \;\; \{\varphi_x \alpha \geqslant k - 1, \varphi_x \beta \geqslant n - k + 1\}. \tag{3.24}$$

Теперь ясно, что если для некоторого k, $2 \leqslant k \leqslant n$ имеет место (3.22), то $L \notin T_0 I$, т. е. $\overline{\alpha} = \beta$ (напомним, что $L \in T_0 I$). Для завершения обоснования алгоритма осталось доказать обратное: $\overline{\alpha} = \beta$ влечет за собой выполнение (3.22), или, что то же самое, (3.24), для некоторого k $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Другими словами, осталось проверить следующее:

$$\overline{\alpha} = \beta \to \exists\, x \; (x \in \mathfrak{M}') \; \varphi_x \alpha + \varphi_x \beta \geqslant n.$$

Эту импликацию пока оставим без доказательства; она является следствием теоремы 3.3, к которой мы вскоре перейдем.

Отыскание $\overline{a}$ для любого $a \in I$ осуществляется по сходной, но более простой схеме. Этапы $1^\circ, 2^\circ$ отпадают за ненадобностью, поскольку заведомо $\overline{a} \neq a$, и система $\{x_i\}$, удовлетворяющая условию (3.18) при $t \downarrow \alpha$, теперь тривиально определяется начальными условиями в точке a. Этапы $3^\circ, 4^\circ$ сохраняются без изменений (разумеется, с заменой α на a). Что касается нахождения $\overline{\beta}$, то оно, в соответствии с определением, сводится к нахождению $\underline{\beta}$: если $\underline{\beta} = \beta$, то и $\overline{\beta} = \beta$; в противном случае $\overline{\beta} \notin \overline{I}$.

Если и α, и β несингулярны, то решение задачи еще более упрощается и сводится, по существу, к формуле (3.20), являющейся в этом случае очевидным следствием работ [1, 2].

Отыскание $\underline{a} (a \in \overline{I})$ проводится аналогично, с очевидной переменой ориентации. Концы α и β меняются ролями; наборы вронскианов (3.19) и (3.21) заменяются наборами $[x; 1 \dots k]$, $[y; 1 \dots k]$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ (при нумерации, принятой для ИФС); наконец, в формуле, аналогичной (3.20), должен, естественно, фигурировать не минимальный в (a, β), а максимальный в (α, a) из нулей соответствующих вронскианов.

Отметим еще следующую подробность: «явная» формула (3.20) не делает непосредственно очевидными непрерывность и возрастание $\overline{t}$ как функции t, установленные выше из общих соображений. В самом деле, если рассматривать левый конец α как переменный, то каждая отдельно взятая величина $t^1_{w_k} I$ может и убывать при возрастании α, и испытывать разрывы по α в своей области определения. Тот факт, что для минимума из $t^1_{w_k} I$ и то и другое исключено, объясняется, конечно, наличием специфической связи между $w_2, w_3, \dots, w_n$.

3.5. Часто бывает важно выделить из множества $\mathfrak{N}\overline{I}$, если оно непусто, решения с «наиболее удобным» расположением нулей; смысл этого выражения колеблется в зависимости от обстоятельств. Так, ввиду устойчивости простых нулей при малых возмущениях в некоторых вопросах могут особый интерес представлять решения, имеющие в I не менее n простых нулей; они всегда существуют, если $L \notin T_0 I$ (см. [9]; близкое утверждение «$L \notin T_0 I \to \exists x\ (x \in \mathfrak{M}')\ \psi_x I \geqslant n$» ранее установили Ф. Хартман [3] и О. Арамэ [61]). Чаще, однако, полезнее не «рассредоточивать», а, наоборот, максимально «сосредоточивать» нули, выделяя решения $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$, удовлетворяющие условию $\varphi_x t_1 + \varphi_x t_2 \geqslant n$ для каких-либо $t_1, t_2 \in \overline{I}$; в несингулярном случае наличие подобных решений хорошо известно. Ниже для общего случая будет установлено существование решений, обладающих, наряду с упомянутым, также и некоторыми другими полезными свойствами, в частности, строгим знакопостоянством в интервале (t_1, t_2).

Пусть $L \notin T_0 \overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$. Поставим в соответствие каждому $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$

два следующих n-мерных «вектора нулей»:

$$N_x = (t_x^n \overline{I}, t_x^{n-1}\overline{I}, \ldots, t_x^1\overline{I}),$$
$$N_x^* = (t_x^{m-n+1}\overline{I}, t_x^{m-n+2}\overline{I}, \ldots, t_x^m\overline{I}), \quad \text{где} \quad m = \varphi_x \overline{I}$$

(координаты N_x, таким образом, не возрастают с номером, а координаты N_x^* не убывают). Введем, далее, для n-мерных векторов лексикографическую упорядоченность, записывая ее, как обычно, с помощью знаков $\prec, \preceq$.

Рассмотрим теперь две сходные экстремальные задачи: найти в $\mathfrak{N}\overline{I}$ решение, минимизирующее N_x по $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$ (его мы будем называть решением с «минимальными нулями»); найти в $\mathfrak{N}\overline{I}$ решение, максимизирующее N_x^* по $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$ (решение с «максимальными нулями»). Таким образом, скажем, $x(\in \mathfrak{N}\overline{I})$ есть решение с минимальными нулями, если

$$N_x \preceq N_z \quad \text{для всех} \quad z \in \mathfrak{N}\overline{I}. \tag{3.25}$$

Сразу отметим, что требуемые решения с экстремальными нулями, если они существуют, определены однозначно с точностью до множителя. В самом деле, предположим, например, что условию (3.25), наряду с x удовлетворяет также некоторое решение $x' \not\equiv cx, N_x = N_{x'}$. Пусть $z(t) = x'(s)x(t) - x(s)x'(t)$, где s — любая точка интервала $(t_x^1\overline{I},\ t_x^n\overline{I})$, отличная от $t_x^i\overline{I}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. Очевидно, $z \in \mathfrak{N}\overline{I}$ и $N_z \prec N_x$ что противоречит (3.25).

Теорема 3.3. *о решениях с экстремальными нулями Если, как предполагалось, $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$, то в $\mathfrak{N}\overline{I}$ существуют решения $x(t), x^*(t)$ с минимальными и максимальными нулями соответственно, причем*

$$N_x = (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-k}), \quad N_{x^*}^* = (\underbrace{\underline{\beta}, \ldots, \underline{\beta}}_{k^*}, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n-k^*}),$$

где k, k^* — некоторые числа $(1 \leqslant k, k^* \leqslant n-1)$.

Из соображений симметрии достаточно доказать теорему в части, относящейся к решению с минимальными нулями. Начнем, естественно, с существования x. Соотношения $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$ означают, что $\alpha < \overline{\alpha} \leqslant \beta$. В силу леммы 3.3 $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}] \neq \varnothing$; с другой стороны, $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}) = \mathfrak{N}(\alpha, \overline{\alpha}] = \varnothing$. Поэтому для любой $z \in \mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ первая координата у $N_z = (\overline{\alpha}, \ldots, \alpha)$ является минимальной из возможных; таким образом, минимизация N_z в $\mathfrak{N}\overline{I}$ сводится к минимизации N_z в $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ или, что то же самое, в пересечении $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ с единичной сферой пространства $\mathfrak{M}$. Дальнейшее рассуждение целиком опирается на теорему 3.1. Она показывает, что $\mathfrak{N}_1$ есть компакт; с другой стороны, из нее легко следует, что $t_z^i[\alpha, \overline{\alpha}] (i = 2, 3, \ldots, n-1)$ полунепрерывны снизу по z в $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$. Поэтому множество $\mathfrak{N}_2$ решений

$z \in \mathfrak{N}_1$, на которых достигается $\inf t_z^{n-1}[\alpha, \overline{\alpha}]$ по всем $z \in \mathfrak{N}_1$, есть непустой компакт. Продолжая так и далее, обозначим через $\mathfrak{N}_{i+1} (i = 2, 3, \ldots, n-2)$ множество решений из $\mathfrak{N}_i$, на которых достигается $\inf t_z^{n-i}[\alpha, \overline{\alpha}]$ по всем $z \in \mathfrak{N}_i$; в силу той же теоремы 3.1 все $\mathfrak{N}_i$ являются непустыми компактами. Ясно, что любое $x \in \mathfrak{N}_{n-1}$ есть решение с минимальными нулями (фактически $\mathfrak{N}_{n-1}$ состоит лишь из двух решений, отличающихся знаком).

Итак, выяснено, что x существует и $N_x = (\overline{\alpha}, \ldots, \alpha)$. Теперь нужно показать, что и каждая из остальных $n-2$ координат N_x совпадает либо с $\overline{\alpha}$ либо с α, т. е. что $x(t) \neq 0$ в $(\alpha, \overline{\alpha})$. Предположим противное: пусть

$$N_x = (\underbrace{t_r, \ldots, t_r}_{k_r}, \underbrace{t_{r-1}, \ldots, t_{r-1}}_{k_{r-1}}, \ldots, \underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{k_1}),$$

где $r = \psi_x[\alpha, \overline{\alpha}] \geqslant 3$, $t_i = t_i^x[\alpha, \overline{\alpha}]$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Ясно, что $\alpha = t_1 < < t_{r-1} < t_r = \overline{\alpha}$, $\varphi_x t_i = k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $\varphi_x \overline{\alpha} \geqslant k_r$, $k_1 + \ldots + k_r = n$. Мы установим сейчас с помощью «возмущения нулей» существование решения $z \in \mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ такого, что $N_z \prec N_x$; это противоречие с (3.25) докажет теорему.

Пусть $y \in \mathfrak{M}'$ — линейно независимое с x решение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_y t_i \geqslant k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r-2), \quad \varphi_y t_i \geqslant k_i - 1 \quad (i = r-1, r). \tag{3.26}$$

Так как каждым условием вида $\varphi_y s \geqslant l$ в $\mathfrak{M}$ выделяется $(n-l)$-мерное подпространство, то совокупность условий (3.26) определяет в $\mathfrak{M}$ подпространство размерности не меньше, чем $n - k_1 - \ldots - k_r + 2 = 2$, так что требуемое $y \not\equiv cx$ заведомо существует. Возможны два случая.

а) $\varphi_y \overline{\alpha} = k_r - 1$. Выберем непересекающиеся Ut_{r-1} и $U\_\overline{\alpha}$ так, чтобы $t_{r-2} \notin Ut_{r-1}$, $y(t) \neq 0$ в $U\_\overline{\alpha}$. Подобно тому как это делалось при доказательстве леммы 2.3, определим $z \in \mathfrak{M}'$ формулой

$$z(t) = z(t, s) = x(t) - \frac{x(s)}{y(s)} y(t), \tag{3.27}$$

где

$$\text{точка} \quad s \in U\_\overline{\alpha} \quad \text{достаточно близка к} \quad \overline{\alpha}. \tag{3.28}$$

Посмотрим, что можно сказать о нулях $z(t)$. Во-первых, очевидно, что

$$\varphi_z t_i \geqslant k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r-2), \quad \varphi_z \overline{\alpha} = k_r - 1, \quad z(s) = 0. \tag{3.29}$$

Кроме того,

$$\varphi_z U t_{r-1} \geqslant k_{r-1}. \tag{3.30}$$

Действительно, так как $\varphi_x \overline{\alpha} \geqslant k_r > \varphi_y \overline{\alpha}$, то

$$\frac{x(s)}{y(s)} \to 0 \quad (s \uparrow \overline{\alpha}) \tag{3.31}$$

и (3.30) вытекает из (3.28), (3.31) и леммы 2.2. Соотношения (3.29), (3.30) показывают, что, с одной стороны, $\varphi_z[\alpha,\overline{\alpha}] \geqslant n$, т.е. $z \in \mathfrak{N}[\alpha,\overline{\alpha}]$, а с другой, что

$$N_z \preceq (\underbrace{\overline{\alpha},\ldots,\overline{\alpha}}_{k_r-1}, s,\ldots) \prec (\underbrace{\overline{\alpha},\ldots,\overline{\alpha}}_{k_r},\ldots) = N_x.$$

б) $\varphi_y\overline{\alpha} \geqslant k_r$. В этом более простом случае $z(t)$ можно определить формулой (3.27), выбрав в качестве s любую точку интервала (t_{r-2}, t_{r-1}). Очевидно, $z \in \mathfrak{N}[\alpha,\overline{\alpha}]$ и

$$N_z \preceq (\underbrace{\overline{\alpha},\ldots,\overline{\alpha}}_{k_r},\underbrace{t_{r-1},\ldots,t_{r-1}}_{k_{r-1}-1}, s,\ldots) \prec (\underbrace{\overline{\alpha},\ldots,\overline{\alpha}}_{k_r},\underbrace{t_{r-1},\ldots,t_{r-1}}_{k_{r-1}},\ldots) = N_x.$$

Легко видеть, что в той части теоремы, которая относится к x (x^*), существенно лишь первое (второе) из условий $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$.

3.6. Если $\overline{\alpha} = \beta$, то x и x^*, разумеется, могут совпадать. Этот случай заслуживает того, чтобы ему было уделено некоторое внимание. В определенном смысле типичной является следующая ситуация: $\mathfrak{N}[\alpha,\overline{\alpha}]$ представляет собой «прямую» в $\mathfrak{M}$, т. е. состоит из решений вида $cy(t)(c \neq 0)$, где y строго знакопостоянна в $(\alpha,\overline{\alpha})$ и $\varphi_y\alpha + \varphi_y\overline{\alpha} = n$. В этом случае, очевидно, $x = x^* = y$, а векторы N_y и N_y^* отличаются лишь противоположным порядком координат. Рассматриваемый вопрос непосредственно связан с описанным выше алгоритмом нахождения $\overline{\alpha}$; именно, нетрудно показать, что «типичная» ситуация обусловлена единственностью критического индекса k (т. е. минимизирующего индекса в (3.20) или, если $\overline{\alpha}$ определяется этапом 4°, индекса, при котором выполняется (3.22)). В случае неединственности k возникают разнообразные «нетипичные», но тем не менее важные в некоторых вопросах ситуации. Вот несколько примеров на эту тему (ради удобства мы позволим себе не оговаривать каждый раз, что в $\mathfrak{N}[\alpha,\overline{\alpha}]$ входят лишь нетривиальные решения).

1°. $L = \dfrac{d^3}{dt^3} + \dfrac{d}{dt}$, $\alpha = 0$, $\beta = \overline{0} = 2\pi$. Здесь $\mathfrak{N}[0,2\pi]$ — двумерная плоскость, натянутая на решения $y_1 = \sin t$, $y_2 = 1 - \cos t$; $x = x^* = y_2$, $N_x = (2\pi, 0, 0)$, $N^*_{x^*} = (0, 2\pi, 2\pi)$.

2°. $L = \dfrac{d^4}{dt^4} + 4$, $\alpha = 0$, $\beta = \overline{0}$ (≈ 3.93) — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{th}\beta$. $\mathfrak{N}[0,\beta]$ состоит из двух прямых $y = cy_1$ и $y = cy_2$, где $y_1 = \operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t \cos t$, $y_2(t) = y_1(t-\beta)$, $x = y_1$, $x^* = y_2$, $N_x = (\beta, 0, 0, 0)$, $N^*_{x^*} = (0, \beta, \beta, \beta)$.

3°. $L = \dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{6t}{3t^2+1}\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{6}{3t^2+1}\dfrac{d}{dt}$, $\alpha = -1$, $\beta = -\overline{1} = 1$. Здесь $\mathfrak{N}[-1,1]$ состоит из функций вида $c_1y_1 + c_2y_2$, $c_1c_2 \leqslant 0$ (т. е. представляет собой два «квадранта»), где $y_1 = (t+1)^2(t-1)$, $y_2 = (t+1)(t-1)^2$. Очевидно, $x = y_1$, $x^* = y_2$, $N_x = (1,-1,-1)$, $N^*_{x^*} = (-1,1,1)$ (между прочим, этот пример свидетельствует о некорректности теоремы 3 из [56]).

4°. $L = \dfrac{d^n}{dt^n}$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \overline{-\infty} = \infty$. Этот пример показывает, насколько сложным может быть строение $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$. Здесь $\mathfrak{N}[-\infty, \infty]$ содержит все многочлены степени m $(m = 0, 1, \ldots, n-2)$, имеющие не менее $2m - n + 2$ вещественных корней. Очевидно, $x = x^* = 1$, $N_x = (\infty, -\infty, \ldots, -\infty)$, $N^*_{x^*} = (-\infty, \infty, \ldots, \infty)$.

Последний пример поучителен и в другом отношении: $\varphi_1[-\infty, \infty] = 2n-2$ — максимально возможное значение $\varphi_z[\alpha, \overline{\alpha}]$ $(z \in \mathfrak{M}')$, поскольку $\varphi_z[\alpha, \overline{\alpha}] = \varphi_z[\alpha, \overline{\alpha}) + \varphi_z\overline{\alpha}$ и $L \in T_0[\alpha, \overline{\alpha})$.

§ 4. Критерий неосцилляции

4.1. Настоящий параграф посвящен следующему предложению.

Теорема 4.1. *Пусть* $[a, b) \subset I$. *Для соотношения* $L \in T_0[a, b]$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали функции* $z_i(t) \in C^{n-1}_*[a, b)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$*, удовлетворяющие условиям*

$$\forall k, l\ (1 \leqslant k < l \leqslant n)\ [z; k \ldots n-1 \setminus l](t) > 0 \qquad (a \leqslant t < b), \tag{4.1}$$

$$(-1)^{n-i} L z_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (a < t < b). \tag{4.2}$$

Концы a и b можно, разумеется, поменять ролями, заменив всюду $[a, b)$ полуинтервалом $(a, b]$.

Сформулированное утверждение является, очевидно, полуэффективным критерием неосцилляции. При $n = 2$ теорема 4.1 переходит (в случае несингулярности b) в критерий Валле-Пуссена (см. § 1). При $n = 3$ неравенства (4.1) и (4.2) принимают вид

$$z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad [z_1, z_2] > 0, \quad Lz_1 \geqslant 0, \quad Lz_2 \leqslant 0 \quad (a \leqslant t < b). \tag{4.3}$$

Легко видеть, что эти условия существенно отличаются от условий приведенного в § 1 полуэффективного критерия Азбелева—Кондратьева—Цалюка, хотя и имеется некоторое внешнее сходство. В частности, ограничения на коэффициенты $p_i(t)$ оператора L, генерируемые неравенствами $Lz_1 \geqslant 0$, $Lz_2 \leqslant 0$, при той или иной конкретизации z_1, z_2, не связаны с гладкостью p_i (которая вообще не предполагается). Далее, в (4.3) отсутствуют краевые условия для z_1, z_2, но имеется связывающее z_1 и z_2 требование $[z_1, z_2] > 0$. Определенное отличие состоит, конечно, и в том, что теорема Азбелева—Кондратьева—Цалюка дает критерий неосцилляции не на отрезке, а на полуинтервале (с несингулярным концом).

Систему функций $z_i \in C_*^{n-1}J \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ будем называть *согласованной* на промежутке J, если на J положительны все вронскианы, входящие в левую часть (4.1). Содержащее $n(n-1)/2$ неравенств условие (4.1) согласованности $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ на $[a, b)$ может показаться затруднительным для практического применения теоремы 4.1; подчеркнем, однако, что оно не связано с оператором L, поэтому набор достаточно удобных стандартных согласованных систем может быть заготовлен заранее. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже, когда будет идти речь о конкретизациях $\{z_i\}$.

Теорема 4.1 доставляет критерий неосцилляции на отрезке, по крайней мере один из концов которого несингулярен. Непосредственно распространить этот результат на отрезок с обоими сингулярными концами не удается, однако из теоремы 4.1 вытекает достаточное условие неосцилляции на интервалах или полуинтервалах, оба конца которых могут быть сингулярными.

Следствие 4.1. *Если существует система $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, согласованная на интервале $(a, b) \subset I$ и удовлетворяющая условию (4.2), то $L \in T_0[a, b)$.*

В самом деле, каково бы ни было $t \in (a, b)$, здесь, очевидно, выполнены условия теоремы 4.1 для отрезка $[t, b]$ и поэтому $L \in T_0[t, b]$. Ввиду произвольности t это означает, что $L \in T_0(a, b) = T_0[a, b) = T_0(a, b]$ (см. лемму 2.3). Как видим, здесь оказывается кстати то обстоятельство, что требование согласованности $\{z_i\}$ на промежутке J не связывает z_i какими-либо краевыми условиями с концами J.

Отметим, что условие неосцилляции, содержащееся в следствии 4.1, не необходимо, хотя и весьма близко к необходимому. Например, $L = \dfrac{d^3}{dt^3} - p\dfrac{d^2}{dt^2}$ $(p = \mathrm{const})$ при любом p принадлежит $T_0(-\infty, \infty)$ (но, разумеется, не $T_0[-\infty, \infty]$); в то же время соответствующая согласованная на $(-\infty, \infty)$ система существует здесь лишь при $p \neq 0$ ($z_1 = 1, z_2 = e^{pt}$ при $p > 0$; $z_1 = e^{pt}, z_2 = 1$ при $p < 0$).

4.2. Переходим к доказательству теоремы 4.1. Начнем с необходимости.

Введенные в § 2 ИФС характеризуются поведением решений вблизи одного из концов промежутка. Можно пойти дальше в этом направлении, выделяя фундаментальные системы с определенным поведением решений вблизи обоих концов. Именно, будем говорить, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют *дважды иерархическую фундаментальную систему (ДИФС) на I,* если они образуют ИФС как при $t \downarrow \alpha$, так и при $t \uparrow \beta$.

Лемма 4.1. *Если $L \in T_0\overline{I}$, то ДИФС на I существует и является $(+)$-декартовой на I системой.*

Убедимся вначале в существовании ДИФС на I. При любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, условия $\varphi_{x_k}\alpha \geqslant k-1, \varphi_{x_k}\beta \geqslant n-k$ выделяют в $\mathfrak{M}$ подпространство размерности не меньшей, чем $n-(k-1)-(n-k)=1$; поэтому соответствующее $x_k \in \mathfrak{M}'$ найдется при любом $k (1 \leqslant k \leqslant n)$. При этом имеют место точные равенства

$$\varphi_{x_k}\alpha = k-1, \quad \varphi_{x_k}\beta = n-k \quad (k=1,2,\ldots,n), \tag{4.4}$$

так как $\varphi_{x_k}\overline{I} \leqslant n-1 \quad (k=1,2,\ldots,n)$ согласно предпосылке $L \in T_0\overline{I}$. Отсюда же следует, что $x_1,\ldots,x_n$ не имеют нулей в I, поэтому их можно выбрать положительными в I. Существование ДИФС на I, таким образом, доказано. Отметим также, что каждая из функций, входящих в ДИФС на I, определяется однозначно с точностью до положительного множителя: если бы для некоторого k в $\mathfrak{M}'$ нашлись x_k и $x'_k (\not\equiv cx_k)$, удовлетворяющие условиям (4.4), то, выбирая произвольное $s \in I$ и полагая $x(t) = x_k(s)x'_k(t) - x'_k(s)x_k(t) \in \mathfrak{M}'$, мы получили бы $\varphi_x\overline{I} \geqslant n$, что невозможно.

Покажем теперь, что ДИФС на I является (+)-декартовой на I; для этого согласно лемме 2.5 достаточно проверить, что

$$\forall i,j \ (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)[x;i\ldots j] > 0 \quad \text{на} \quad I. \tag{4.5}$$

Предположим, что (4.5) не выполняется. Поскольку вблизи α и β все требуемые неравенства обеспечиваются теоремой 2.1, это значит, что для некоторых $i,j \quad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ и некоторого $s \in I$

$$[x;i\ldots j](s) = 0. \tag{4.6}$$

Отсюда вытекает существование нетривиальной линейной комбинации $v = c_ix_i + c_{i+1}x_{i+1}\ldots + c_jx_j$ такой, что $\varphi_v s \geqslant j-i+1$ (в левой части (4.6) стоит определитель соответствующей однородной системы). Так как, кроме того, $\varphi_v\alpha \geqslant i-1$, $\varphi_v\beta \geqslant n-j$, то $\varphi_v\overline{I} \geqslant n$, что невозможно.

Впервые подобная связь между строго чебышёвскими (или чебышёвскими) и декартовыми системами была обнаружена С. Н. Бернштейном в связи с построением так называемой *базы чебышёвских систем* [5, 6]; лемма 4.1 может рассматриваться как модификация этого построения (наши предположения и методика отличны от применявшихся в [5, 6]).

Вернемся к необходимости в теореме 4.1. Построение ДИФС на (a,b) еще не достаточно для этой цели, так как нужна согласованность не на (a,b), а на $[a,b)$. Заметим, однако, что $L \in T_0[a_1,b]$ для всех a_1, достаточно близких к a; действительно, соотношение $L \in T_0[a,b]$ означает, что $\underline{b} < a$ либо $\underline{b} \notin \overline{I}$, так что остается сослаться на теорему 3.2. Поэтому, если выбрать a_1 из достаточно малой U_a, ДИФС $\{x_i\}$ на (a_1,b) будет согласно лемме 4.1 (+)-декартовой, а следовательно, и согласованной системой на $[a,b)$. В качестве $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}$, фигурирующих в теореме 4.1, можно выбрать, например, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ соответственно. Между прочим, аналогичные соображения показывают, что *если* $[a, b] \subset I$ *и* $L \in T_0[a, b]$, *то найдется фундаментальная система, являющаяся* $(+)$*-декартовой на* $[a, b]$.

Итак, необходимость в теореме 4.1 доказана и притом в усиленной форме, поскольку всякая $(+)$-декартова на J система является согласованной на J, но не обратно (если число функций в системе больше двух). Пример: при любом $c > 2$ система

$$z_1 = t^2 - ct + 1, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = t + 1$$

является согласованной на $[0, 1]$, не будучи $(+)$-декартовой на $(0, 1)$. Причина, по которой в формулировке теоремы 4.1 сделан упор именно на согласованность, состоит, разумеется, в том, что наиболее «рабочей» является часть теоремы, относящаяся к достаточности, и с этой точки зрения естественно предъявлять к $\{z_i\}$ возможно меньшие требования. Можно ожидать, впрочем, что здесь это не имеет особого значения, так как, по-видимому, все наиболее естественные «пробные» согласованные системы являются одновременно $(+)$-декартовыми. Отметим, что во избежание излишней громоздкости формулировки мы не пошли по пути минимизации ограничений на $\{z_i\}$ так далеко, как можно было бы. В частности, из доказательства будет видно, что для всех вронскианов, входящих в условие согласованности и имеющих порядок не выше $n-3$ (таковые имеются лишь при $n \geqslant 4$), требование положительности можно заменить строгим знакопостоянством. Кроме того, можно видоизменить доказательство таким образом, чтобы допустить обращение в нуль при $t = a$ некоторых (но не всех) вронскианов, входящих в условие согласованности; например, при $n = 3$ достаточно, чтобы неравенство $z_1(t) > 0$ в (4.3) выполнялось лишь при $a < t < b$.

4.3. Прежде чем перейти к достаточности, напомним несколько известных фактов. Первые два из них относятся к функции Грина $G(t, s)$ оператора L при интерполяционных краевых условиях

$$\begin{gathered} \varphi_x t_i \geqslant k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ (k_1 + \ldots + k_m = n, \quad \xi \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant \eta, \quad [\xi, \eta] \subset I.) \end{gathered} \tag{4.7}$$

Лемма 4.2 (см. [8, 9]). *Если* $L \in T_0[\xi, \eta]$, *то в квадрате* $K : \xi \leqslant t, s \leqslant \eta$ *справедливо неравенство*

$$G(t, s)(t - t_1)^{k_1}(t - t_2)^{k_2} \ldots (t - t_m)^{k_m} \geqslant 0 \tag{4.8}$$

Приводим для удобства читателя краткое доказательство. Существование $G(t, s)$ очевидно. Покажем, что, каково бы ни было отличное от $t_1, \ldots, t_m$ фиксированное $t_0 \in [\xi, \eta]$, функция $g(s) = G(t_0, s)$ знакопостоянна и отлична от тождественного нуля в $[\xi, \eta]$. Действительно, в противном случае, очевидно, нашлась бы непрерывная $f(s) > 0 \quad (\xi \leqslant s \leqslant \eta)$, ортогональная к $g(s)$ на $[\xi, \eta]$; поэтому решение $x(t)$ краевой задачи (4.7) для уравнения $Lx = f$, помимо n нулей, определяемых условиями (4.7), имело бы еще нуль в точке t_0, что противоречит обобщенной теореме Ролля (1.4) для $J = [\xi, \eta]$.

По этой же причине

$$\frac{\partial^{k_i} G(t,s)}{\partial t^{k_i}}\Big|_{t=t_i} \not\equiv 0 \quad (\xi \leqslant s \leqslant \eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Из сказанного уже следует, что левая часть (4.8) знакопостоянна в K; неотрицательность ее усматривается хотя бы из того, что при $t, s \in [t_m, \eta]$ $G(t,s)$, очевидно, совпадает с функцией Коши оператора L (предположение $\eta > t_m$ не ограничивает общности).

Формулировка леммы 4.2 допускает уточнения и обобщения в различных направлениях. Можно показать, например, что $G(t,s)$ не имеет нулей в полосах $\{t_i < t < t_{i+1}, t_1 < s < t_m\}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$; более содержательные оценки функции Грина, хорошо приспособленные для исследования задач с нелинейностями, указаны Ю. В. Покорным [62]. Отметим также, что *лемма (4.2) допускает распространение на краевые условия с обобщенными кратностями*; подробнее здесь на этом мы не останавливаемся.

Лемма 4.3. *$G(t,s)$, рассматриваемая как функция узлов $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (при фиксированных $t, s, m, k_1, \ldots, k_m$), непрерывна в каждой точке $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, где она определена, т. е. где краевая задача (4.7) невырождена.*

Этот факт достаточно очевиден. Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, и для задач с многоточечными краевыми условиями общего вида, что легко усмотреть из какой-либо «явной» формулы для $G(t,s)$ (см., например, [49]).

Лемма 4.4. *Пусть $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ образует строго чебышёвскую систему на $[a,c]$, причем $[u; 1 \ldots m](t) > 0 \quad (a \leqslant t \leqslant c)$. Тогда для любого $k (1 \leqslant k \leqslant m-1)$ и любых t_1, t_2 таких, что $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant c$,*

$$v_k(u_1, \ldots, u_m; t_1, t_2) \overset{D_f}{=}$$

$$\begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \ldots & u_m(t_1) \\ \dot{u}_1(t_1) & \dot{u}_2(t_1) & \ldots & \dot{u}_m(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(k-1)}(t_1) & u_2^{(k-1)}(t_1) & \ldots & u_m^{(k-1)}(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \ldots & u_m(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(m-k-1)}(t_2) & u_2^{(m-k-1)}(t_2) & \ldots & u_m^{(m-k-1)}(t_2) \end{vmatrix} > 0 \quad (4.9)$$

Эта лемма является частным случаем теоремы, сформулированной Г. Пойа в [1] (при несколько иных, но эквивалентных предположениях). Так как доказательство в [1] отсутствует, приведем необходимые пояснения. Заметим, во-первых, что рассматриваемый определитель ни при каких $t_1, t_2 (a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant c)$ не обращается в нуль: в противном случае нашлась бы нетривиальная линейная комбинация $u = c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m$, удовлетворяющая условиям $\varphi_u t_1 \geqslant k$, $\varphi_u t_2 \geqslant m - k$, что невозможно, так как $\{u_i\}$ — строго чебышёвская система. Ввиду непрерывности по t_1, t_2 отсюда вытекает строгое знакопостоянство $v_k(u_1, \ldots, u_m; t_1, t_2)$ в треугольнике $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant c$; достаточно поэтому доказать (4.9) для какой-либо одной точки этого треугольника. Предположим для удобства записи, что $a \leqslant 0 < c$ (этого всегда можно добиться очевидной заменой переменной), и покажем, что

$$v_k(u_1, \ldots, u_m; 0, \tau) > 0 \quad \text{при достаточно малом} \quad \tau > 0. \tag{4.10}$$

Поскольку $u_i \in C^{m-1}[a, c] \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, имеем

$$\begin{aligned} u_i^{(r)}(\tau) = u_i^{(r)}(0) + \frac{\tau}{1!} u_i^{(r+1)}(0) + \ldots \\ + \frac{\tau^{m-r-1}}{(m-r-1)!} u_i^{(m-1)}(0) + o(\tau^{m-r-1}) \quad (\tau \to 0). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Соотношения (4.11) показывают, что $v_k(u_1, \ldots, u_m; 0, \tau)$ представляет собой произведение двух определителей:

$$v_k(u_1, \ldots, u_m; 0, \tau) = d_k(\tau) \cdot [u; 1 \ldots m](0), \tag{4.12}$$

где

$$d_k(\tau) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\tau}{1!} & \ldots & \ldots & \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{\tau^k}{k!} & \ldots & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} + o(\tau^{m-1}) \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & \frac{\tau^{k-3}}{(k-3)!} & \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} & \ldots & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} + o(\tau^{m-2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \frac{\tau}{1!} & \frac{\tau^2}{2!} & \ldots & \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{\tau^k}{k!} + o(\tau^k) \end{vmatrix}.$$

Несложный подсчет с применением известной формулы

$$[fv_1, fv_2, \ldots, fv_n] = f^n [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

дает

$$d_k(\tau) = \frac{1!2!\dots(m-k-1)!}{k!(k+1)!\dots(m-1)!}\tau^{k(m-k)} + o(\tau^{k(m-k)}) \quad (\tau \to 0).$$

Итак, $d_k(\tau) > 0$ при малых $\tau > 0$; таким образом, (4.10) вытекает из (4.12), поскольку по условию леммы $[u; 1\dots m](0) > 0$.

4.4. Переходим к доказательству достаточности в теореме 4.1, которое будет проводиться от противного.

Пусть существует система $\{z_i\}$, удовлетворяющая условиям (4.1),(4.2), и в то же время $L \notin T_0[a,b]$, т. е. $\overline{a} \leqslant b$. Возможны два случая: $\overline{a} < b$ и $\overline{a} = b$. Рассмотрим вначале первый из них

$$\overline{a} < b. \tag{4.13}$$

По теореме 3.3 в $\mathfrak{N}[a,\overline{a}]$ существует решение $x(t)$ с минимальными нулями (см. 3.5). Пусть $\varphi_x a = k (1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Так как $x(t)$ строго знакопостоянно в $(a,\overline{a})$ и определено с точностью до постоянного множителя, можно без ограничения общности считать выполненными соотношения

$$x(a) = \dot{x}(a) = \ldots = x^{(k-1)}(a) = 0, \tag{4.14}$$

$$x^{(k)}(a) = 1, \tag{4.15}$$

$$x(t) > 0 \quad (a < t < \overline{a}), \tag{4.16}$$

$$x(\overline{a}) = \dot{x}(\overline{a}) = \ldots = x^{(n-k-1)}(\overline{a}) = 0. \tag{4.17}$$

Минимальность нулей $x(t)$ обеспечивает импликацию

$$\{y \in \mathfrak{M}', \ \ \varphi_y a \geqslant k+1\} \to \varphi_y \overline{a} \leqslant n-k-2. \tag{4.18}$$

Введем теперь наряду с x другое решение, $x_0 \in \mathfrak{M}'$, которое подчиним требованиям

$$x_0(a) = \dot{x}_0(a) = \ldots = x_0^{(k-2)}(a) = 0, \tag{4.19}$$

$$x_0(\overline{a}) = \dot{x}_0(\overline{a}) = \ldots = x_0^{(n-k-2)}(\overline{a}) = 0, \tag{4.20}$$

$$x_0^{(k-1)}(a) = 1, \tag{4.21}$$

(при $k=1$ условие (4.19), естественно, отбрасывается, а при $k=n-1$ это относится к (4.20)). Покажем, что такое x_0 существует. Действительно, равенства (4.19) и (4.20) определяют в $\mathfrak{M}$ подпространство размерности $\geqslant 2$, поэтому найдется $x_0 \in \mathfrak{M}'$, удовлетворяющее условиям (4.19), (4.20), линейно независимое с x и определенное с точностью до постоянного множителя; последним можно распорядиться так, чтобы удовлетворить условию (4.21), если только $x_0^{(k-1)} \neq 0$. Но равенство $x_0^{(k-1)} = 0$ невозможно, ибо в этом случае решение $y(t) = x_0(t) - x_0^{(k)}(a)x(t)$ ($\not\equiv 0$, так как x и x_0 линейно независимы) удовлетворяло бы условиям $\varphi_y a \geqslant k+1, \varphi_y \overline{a} \geqslant n-k-1$, что противоречит (4.18). Итак, требуемое $x_0(t)$ существует.

Следующим этапом будет доказательство неравенства

$$(-1)^{n-k} x_0^{(n-k-1)}(\overline{a}) \geqslant 0. \tag{4.22}$$

Допустим, что это не так, т. е. $(-1)^{n-k} x_0^{(n-k-1)}(\overline{a}) < 0$. Тогда $x_0(\overline{a} - - 0) > 0$ и, более того, $x_0 \ggcurly x(t \uparrow \overline{a})$ в силу (4.17). С другой стороны, из (4.14), (4.15), (4.19), (4.21) вытекает, что $x_0 \ggcurly x$ и при $t \downarrow a$. Таким образом, отношение $\dfrac{x_0(t)}{x(t)}$ стремится к ∞ как при $t \downarrow a$, так и при $t \uparrow \overline{a}$; будучи, в соответствии с (4.16), непрерывной функцией в $(a, \overline{a})$, оно достигает минимума в некоторой точке $\tau \in (a, \overline{a})$. Очевидно,

$$[x, x_0](\tau) = 0. \tag{4.23}$$

Положим

$$y(t) = x_0(\tau)x(t) - x(\tau)x_0(t);$$

в силу (4.16) и линейной независимости $x, x_0, y(t) \not\equiv 0$. Согласно (4.23) $\varphi_y \tau \geqslant 2$. Соотношения (4.14), (4.17), (4.19), (4.20) показывают, что $\varphi_y a \geqslant k-1$, $\varphi_y \overline{a} \geqslant n-k-1$; поэтому $y \in \mathfrak{N}[a, \overline{a}]$ и

$$N_y \preccurlyeq (\underbrace{\overline{a}, \ldots, \overline{a}}_{n-k-1}, \tau, \tau, \underbrace{a, \ldots, a}_{k-1}) \prec (\underbrace{\overline{a}, \ldots, \overline{a}}_{n-k}, \underbrace{a, \ldots, a}_{k}) = N_x$$

(по поводу обозначений см. 3.5), что противоречит определению x. Неравенство (4.22) доказано.

До сих пор мы еще не прибегали к услугам системы $\{z_i\}$; теперь сделаем это, введя в рассмотрение функцию

$$z(t) = \begin{vmatrix} z_1(a) & z_2(a) & \ldots & z_{n-1}(a) \\ \dot{z}_1(a) & \dot{z}_2(a) & \ldots & \dot{z}_{n-1}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(k-2)}(a) & z_2^{(k-2)}(a) & \ldots & z_{n-1}^{(k-2)}(a) \\ z_1(\overline{a}) & z_2(\overline{a}) & \ldots & z_{n-1}(\overline{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-k-2)}(\overline{a}) & z_2^{(n-k-2)}(\overline{a}) & \ldots & z_{n-1}^{(n-k-2)}(\overline{a}) \\ z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_{n-1}(t) \end{vmatrix}. \tag{4.24}$$

Непосредственно очевидны соотношения

$$z(a) = \dot{z}(a) = \ldots = z^{(k-2)}(a) = 0, \tag{4.25}$$

$$z(\overline{a}) = \dot{z}(\overline{a}) = \ldots = z^{(n-k-2)}(\overline{a}) = 0. \tag{4.26}$$

В силу (4.1) и (4.13)

$$[z;j\dots n-1](t)>0 \quad (j=1,2,\dots,n-1) \quad (a\leqslant t\leqslant \overline{a}),$$

так что система $z_1,z_2,\dots,z_{n-1}$ является строго чебышёвской на $[a,\overline{a}]$. Поэтому согласно лемме 4.4, из формулировки которой мы заимствуем обозначения,

$$(-1)^{n-k-1}z^{(k-1)}(a)=\nu_k(z_1,\dots,z_{n-1};a,\overline{a})>0, \tag{4.27}$$

$$z^{(n-k-1)}(\overline{a})=\nu_{k-1}(z_1,\dots,z_{n-1};a,\overline{a})>0. \tag{4.28}$$

Раскроем определитель (4.24) по последней строке:

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\nu_{k-1}(z_1,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_{n-1};a,\overline{a})z_i(t). \tag{4.29}$$

Учитывая неравенства (4.1), (4.13), имеем при любом i, $1\leqslant i\leqslant n-1$,

$$[z;j\dots n-1\setminus i](t)>0 \qquad (j=1,2,\dots,n-1) \qquad (a\leqslant t\leqslant \overline{a}).$$

Поэтому при каждом i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ система

$$z_1,z_2,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_{n-1}$$

является строго чебышёвской на $[a,\overline{a}]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям леммы 4.4. Отсюда

$$\forall i\ (1\leqslant i\leqslant n-1)\nu_{k-1}(z_1,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_{n-1};a,\overline{a})>0. \tag{4.30}$$

Сопоставление (4.2), (4.29) и (4.30) дает

$$Lz\leqslant 0 \quad (a<t<\overline{a}). \tag{4.31}$$

Введем, наконец, в рассмотрение функцию

$$v(t)=z(t)-z^{(k-1)}(a)x_0(t)-[z^{(k)}(a)-z^{(k-1)}(a)x_0^{(k)}(a)]x(t).$$

Находим:

$$v(a)=\dot v(a)=\ldots=v^{(k)}(a)=0, \tag{4.32}$$

$$v(\overline{a})=\dot v(\overline{a})=\ldots=v^{(n-k-2)}(\overline{a})=0, \tag{4.33}$$

$$v^{(n-k-1)}(\overline{a})=z^{(n-k-1)}(\overline{a})-z^{(k-1)}(a)x_0^{(n-k-1)}(\overline{a})>0, \tag{4.34}$$

$$Lv=Lz\leqslant 0 \quad (a<t<\overline{a}). \tag{4.35}$$

Эти соотношения вытекают из предыдущих: (4.32) — из (4.14), (4.15), (4.19), (4.21), (4.25); (4.33) — из (4.17), (4.20), (4.26); (4.34) — из (4.17), (4.22), (4.27), (4.28); (4.35) — из (4.31).

Пусть $G_\tau(t,s)$ — функция Грина оператора L при краевых условиях

$$\varphi_y a \geqslant k+1, \quad \varphi_y \tau \geqslant n-k-1 \tag{4.36}$$

(если $k=n-1$, то $G_\tau(t,s)$ есть не зависящая от τ функция Коши). Так как $L \in T_0[a,\tau]$ при любом $\tau \in (a,\overline{a})$, то, в соответствии с леммой 4.2

$$(-1)^{n-k-1} G_\tau(t,s) \geqslant 0 \quad \text{при любом} \quad \tau \in (a,\overline{a}) \quad (a \leqslant t,s \leqslant \tau). \tag{4.37}$$

Согласно (4.18) краевая задача (4.36) является невырожденной и при $\tau=\overline{a}$; поэтому $G_{\overline{a}}(t,s)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$(-1)^{n-k-1} G_{\overline{a}}(t,s) \geqslant 0 \quad (a \leqslant t,s \leqslant \overline{a}), \tag{4.38}$$

которое получается из (4.37) предельным переходом при $\tau \uparrow \overline{a}$ в соответствии с леммой 4.3. Функция $v(t)$ согласно (4.32), (4.33) удовлетворяет краевым условиям (4.36) при $\tau=\overline{a}$. Отсюда, учитывая неравенства (4.35) и (4.38) получаем

$$(-1)^{n-k} v(t) = (-1)^{n-k} \int_a^{\overline{a}} G_{\overline{a}}(t,s)(Lv)(s)\,ds \geqslant 0 \quad (a \leqslant t \leqslant \overline{a}). \tag{4.39}$$

Однако, с другой стороны, из (4.33) и (4.34) следует, что

$$(-1)^{n-k} v(\overline{a}-0) < 0. \tag{4.40}$$

Противоречие между (4.39) и (4.40) показывает, что случай (4.13) невозможен.

Если $\overline{a}=b$, это доказательство не проходит. Прежде всего, многие из фигурирующих выше соотношений могут вообще потерять смысл, если $\overline{a}=b=\beta$ есть сингулярный конец I; но и при $b \in I$ условия теоремы 4.1 в этом случае уже не обеспечивают положительности связанных с $\{z_i\}$ вронскианов при $t=\overline{a}\,(=b)$, которая существенно использовалась выше. Тем не менее, случай $\overline{a}=b$ удается свести к случаю $\overline{a}<b$. Именно, продолжим функции $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ на интервал (α,b) следующим образом:

$$\widetilde{z}_i(t) = \begin{cases} z_i(t) & \text{при} \quad a \leqslant t < b, \\ x_i(t) & \text{при} \quad \alpha < t < a, \end{cases}$$

где $x_i \in \mathfrak{M}', x_i^{(j)}(a) = z_i^{(j)}(a) (i=1,2,\ldots,n-1; j=0,1,\ldots,n-1)$. Ясно, что

$$\widetilde{z}_i \in C_*^{n-1}(\alpha,b) \qquad (i=1,2,\ldots,n-1), \tag{4.41}$$

$$(-1)^{n-i} L\widetilde{z}_i \geqslant 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1) \quad (\alpha < t < b). \tag{4.42}$$

Если $a_1 < a$ выбрано достаточно близким к a, то в силу (4.1), (4.41) система $\{\widetilde{z}_i\}$ согласована на $[a_1,b)$. Предположение $\overline{a}=b$ влечет за собой согласно теореме 3.2 неравенство $\overline{a}_1 < b$ и ввиду (4.42) мы оказываемся в условиях уже рассмотренного случая теоремы 4.1 (с заменой a на a_1, и $\{z_i\}$ на $\{\widetilde{z}_i\}$).

4.5. Проиллюстрируем теперь некоторые возможности конкретизации $\{z_i\}$ для получения эффективных признаков неосцилляции. Начнем с рассмотрения на интервале (a, b) системы

$$z_k = (t-a)^k (b-t)^{n-k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (\alpha < a < t < b < \beta), \tag{4.43}$$

которая является $(+)$-декартовой на (a, b). Это можно проверить непосредственными вычислениями; проще, однако, заметить, что ДИФС на (a, b) оператора $\dfrac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}$

$$u_i = (t-a)^{i-1}(b-t)^{n+1-i} \ (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

является $(+)$-декартовой на (a, b) в силу леммы 4.1; то же самое справедливо поэтому и для ее подсистемы (4.43). Итак, согласно следствию 4.1 $L \in T_0[a, b)$, если определенные формулой (4.43) функции $z_1, \dots, z_{n-1}$ удовлетворяют неравенствам (4.2), которые в данном случае можно переписать в виде

$$\frac{(-1)^{n-i-1}}{n!} \sum_{k=1}^{n} z_i^{(n-k)}(t) p_k(t) \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (a < t < b). \tag{4.44}$$

Сравним полученное условие с признаком неосцилляции, содержащимся в работе [36] Г. А. Бессмертных и автора и имеющим вид (в интересующем нас линейном случае)

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} (b-a)^k \|p_k\| < 1 \to L \in T_0[a, b], \tag{4.45}$$

где

$$\|f\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|, \ \xi_{nk} = \frac{n-k}{k!n} \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \ \xi_{nn} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!n^n}. \tag{4.46}$$

Предложение (4.45) явилось количественным улучшением известной теоремы Валле-Пуссена [35], в формулировке которой фигурировали другие коэффициенты: $\frac{1}{k!}(> \xi_{nk})$ вместо ξ_{nk}. Основным моментом работы [36] была оценка младших производных n-кратно дифференцируемых функций, имеющая, в обозначениях (4.46), вид

$$\begin{gathered} \{x(a) = x(b) = 0, \varphi_x[a, b] \geqslant n\} \to \|x^{n-k}\| \leqslant \xi_{nk}(b-a)^k \|x^{(n)}\| \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{gathered} \tag{4.47}$$

Здесь постоянные ξ_{nk} неулучшаемы при любых n, k (это, разумеется, не относится к условию (4.45)). Доказательство дискретного аналога оценки

(4.47) можно найти в недавней работе А. Л. Тептина [63]. Непосредственная связь между (4.44) и (4.45) характеризуется соотношением

$$\xi_{nk}(b-a)^k = \frac{1}{n!} \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} \|z_i^{(n-k)}\| \ \Big(= \frac{1}{n!}\|z_1^{(n-k)}\|\Big), \tag{4.48}$$

свидетельствующим, что совокупность линейных неравенств (4.44) является менее ограничительным условием, нежели (4.45) («зазор» между $T_0[a,b)$ и $T_0[a,b]$ компенсируется уже строгим знаком неравенства (4.45)). Проверка (4.48) несложна и предоставляется читателю; впрочем, для вышесказанного существенно лишь неравенство

$$\xi_{nk}(b-a)^k \geqslant \frac{1}{n!} \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} \|z_i^{(n-k)}\|,$$

являющееся очевидным следствием оценки (4.47). Отметив предпочтительность условия (4.44) перед (4.45), следует добавить, однако, что методика работы [36] обладает, сравнительно с теоремой 4.1, определенным «запасом прочности», который позволяет теми же средствами исследовать некоторые нелинейные задачи (именно они фактически и фигурируют в [36]), а также комплекснозначный случай. Справедливость оценки (4.47) для комплекснозначных $x(t)$ легко вытекает из ее справедливости в вещественном случае и из вещественности функции Грина оператора $\dfrac{d^n}{dt^n}$ при любых интерполяционных краевых условиях.

В работе [57] автор получил оценку, родственную (4.47), но основанную на иных предположениях относительно $x(t)$; она также применялась для улучшения теоремы Валле-Пуссена. Дальнейшее развитие такое применение получило в недавней работе Г. С. Зайцевой [38], где установлена теорема валле-пуссеновского типа, усовершенствованная по сравнению с [57] (и независимая по отношению к (4.45)). Как отмечалось в [38], формулировки, данные в этой работе, отличаются от ранее известных валле-пуссеновских признаков неосцилляции тем, что допускают при фиксированной длине промежутка сколь угодно большие значения $\|p_1\|$, если только $\|p_2\|,\ldots,\|p_n\|$ достаточно малы. Мы хотим сейчас отметить в связи с этим, что теорема 4.1 позволяет здесь продвинуться, в определенном смысле, еще дальше и получить *признаки неосцилляции* (правда, не валле-пуссеновского типа), *в которых коэффициент p_1 вообще не участвует.* Для этого достаточно, очевидно, выбрать согласованную систему $\{z_i\}$ из многочленов не выше $(n-2)$-й степени. Множество таких систем непусто; простейшим примером является система

$$z_k = (t-t_0)^{k-1} \ (k=1,2,\ldots,n-1),$$

которая, будучи $(+)$-декартовой на (t_0,∞) доставляет соответствующий признак неосцилляции на полуоси. При фиксации того или иного конкретного промежутка возникает типичная задача о выборе «оптимальной» системы $\{z_i\}$ (из функций определенного семейства), приводящей к минимальным ограничениям. Разумеется, такая постановка задачи далеко не всегда корректна, поскольку жесткость ограничений, вообще говоря, нельзя охарактеризовать одним параметром; но в ряде случаев подобные «оптимальные» пробные системы все же существуют. Пусть, например, $n = 3$, и нас интересует признак неосцилляции на $[t_1, t_2](\subset I)$, не содержащий ограничений относительно $p_1(t)$ (так что z_1 и z_2 должны быть линейными функциями t). Несложные выкладки показывают, что согласованная на (t_1, t_2) система $z_1 = t_2 - t$, $z_2 = t - t_1$ приводит к наименьшим ограничениям

$$p_2(t) + (t - t_i)p_3(t) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2) \quad (t_1 < t < t_2). \tag{4.49}$$

Согласно следствию 4.1 (4.49)$\to L \in T_0[t_1, t_2)$; в действительности заключение может быть усилено до $L \in T_0[t_1, t_2]$ в соответствии со сказанным в конце 4.2.

Между прочим, легко показать, что признаки неосцилляции, не содержащие ограничений относительно какого-либо другого коэффициента $p_i(t)(2 \leqslant i \leqslant n)$, принципиально невозможны.

В связи с системами $\{z_i\}$ степенного типа коснемся еще работ В. А. Кондратьева [21, 48], где основательно изучено двучленное уравнение $x^{(n)} + q(t)x = 0$ и, в частности, установлен признак неосцилляции вида

$$\left\{\frac{\mu_n}{t^n} \leqslant q(t) \leqslant \frac{\lambda_n}{t^n} \text{ при } 0 < t < \infty\right\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q \in T_0(0, \infty) \tag{4.50}$$

с неулучшаемыми при всех n значениями μ_n, λ_n. Основную роль в доказательстве (4.50) играет установленная в [48] теорема сравнения (1.11); она позволяет сравнить уравнение $x^{(n)} + q(t)x = 0$ с уравнением $x^{(n)} + \dfrac{k}{t^n}x = 0$, после чего точные значения μ_n, λ_n легко определяются:

$$\mu_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{9},\ \lambda_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9},\ \mu_4 = -\frac{9}{16},\ \lambda_4 = 1 \quad \text{и т.д.}$$

В общем случае значение μ_n есть наибольший из локальных минимумов, а λ_n — наименьший из локальных максимумов функции $f_n(\nu) = -\nu(\nu - 1)\ldots(\nu - n + 1)$. Следствие 4.1 позволяет обобщить этот результат В. А. Кондратьева на уравнения общего вида; для этого следует взять пробную систему

$$z_i = t^{\nu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1) \quad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1}) \tag{4.51}$$

с подходящими показателями ν_i. Известно (и без труда проверяется), что система (4.51) является (+)-декартовой на $(0, \infty)$. Задавшись целью получить ограничения, которые были бы минимальными в частном случае

$p_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, легко усмотреть надлежащие значения ν_i непосредственно из графика $f_n(\nu)$. В частности, при $n = 3$ следует взять $\nu_{1,2} = (3 \mp \sqrt{3})/3$, а при $n = 4$ — $\nu_{1,3} = (3 \mp \sqrt{5})/2$, $\nu_2 = 3/2$ (при $n \geqslant 5$ появляется некоторая свобода выбора). Выпишем здесь соответствующие условия неосцилляции на $(0, \infty)$ для $n = 3, 4$. В случае $n = 3$ это условие имеет вид

$$\frac{2\sqrt{3}}{9t^3} - \frac{\sqrt{3} \mp 1}{3t^2} p_1 - \frac{3 \mp \sqrt{3}}{3t} p_2 \pm p_3 \geqslant 0 \quad (0 < t < \infty).$$

Здесь записаны два неравенства, в одном из которых следует брать верхние знаки, а в другом — нижние. При $n = 4$ приходим к следующему условию:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{t^4} + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2t^3} p_1 + \frac{2 \pm \sqrt{5}}{t^2} p_2 + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2t} p_3 + p_4 \leqslant 0, \\ \frac{9}{16t^4} - \frac{3}{8t^3} p_1 + \frac{3}{4t^2} p_2 + \frac{3}{2t} p_3 + p_4 \geqslant 0, \quad (0 < t < \infty). \end{gathered}$$

В случае $p_i(t) \equiv$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ полученные таким образом признаки неосцилляции переходят в (4.50). Отметим, что методика работы [48] не приспособлена для получения подобных обобщений (предложенная автором [54] более общая редакция теоремы (1.11) также недостаточна для этой цели), тогда как результаты настоящего параграфа приводят к ним самым естественным образом.

Последняя (по месту, но не по значению) конкретизация $\{z_i\}$, на которой мы здесь остановимся, — это набор экспонент:

$$z_k = e^{\nu_k t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1}). \tag{4.52}$$

Общеизвестно, что система (4.52) является (+)-декартовой на $(-\infty, \infty)$. Если ввести в рассмотрение «характеристический многочлен» оператора L

$$p(\lambda, t) = \lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t), \tag{4.53}$$

то неравенства (4.2) для системы (4.52) примут вид

$$(-1)^{n-k} p(\nu_k, t) \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.54}$$

Итак, выполнение (4.54) при всех $t \in I$ влечет за собой $L \in T_0 I$. Неравенства (4.54) можно записать несколько иначе, если связать их с корнями $\lambda_i(t)$ многочлена $p(\lambda, t)$.

Следствие 4.2. *Пусть при всех $t \in I$ корни $\lambda_i(t), \ldots, \lambda_n(t)$ многочлена (4.53) являются вещественными и разделенными в том смысле, что*

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \quad (t \in I), \tag{4.55}$$

где $\nu_i (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1})$ — фиксированные постоянные. Тогда $L \in$ $\in T_0 I$.

Для приложений особый интерес представляет случай $I = (-\infty, \infty)$. Эквивалентность обеих формулировок проверяется без труда. Неравенства (4.55) больше проясняют существо дела, тогда как формулировка в виде (4.54) подчеркивает, что за счет удачного выбора $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ можно избавиться от необходимости решения уравнения $p(\lambda, t) = 0$. Ввиду полугруппового свойства класса $T_0 I$ следствие 4.2 сохраняет силу и при нестрогих неравенствах $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1}$.

Итак, возможности, доставляемые теоремой 4.1, довольно велики. В то же время необходимо подчеркнуть, что результаты настоящего параграфа отнюдь не исчерпывают этой проблематики. В частности, теоремы валле-пуссеновского типа, содержащие интегральные ограничения на величины коэффициентов $p_i(t)$ (см., например, [9, 38, 49]) не могут быть непосредственно получены с помощью теоремы 4.1 — по крайней мере, если ограничиться не зависящими от L пробными системами. Получение полуэффективного критерия неосцилляции, позволяющего охватить интегральные признаки, было бы дальнейшим продвижением в этом круге вопросов.

§ 5. Приложение к асимптотическим оценкам решений

Результаты § 4 в сочетании с некоторыми фактами, установленными в § 2, могут применяться для получения оценок роста решений уравнения $Lx = 0$ при $t \uparrow \beta$ (или $t \downarrow \alpha$), где β (или α) — сингулярный конец интервала I. Этим мы и займемся в настоящем параграфе, причем ограничимся случаем $t \uparrow \beta$. Прежде чем перейти к самим оценкам, остановимся еще на одном факте из теории осцилляции.

5.1.

Лемма 5.1. *Отрезок* $[a, b] \subset I$ *является промежутком осцилляции для* L *(т.е.* $\overline{a} \leqslant b$*) в том и только том случае, если существует* $u(t) \in C_*^{n-1}[a, b]$*, удовлетворяющая относительно некоторых точек* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(2 \leqslant m \leqslant n, a \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_m \leqslant b)$ *следующим условиям:*

$$\varphi_u t_i \geqslant k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5.1}$$

где $k_i > 0$ *таковы, что* $k_1 + \ldots + k_m = n$*;*

$$u^{(k_m)}(t_m) \leqslant 0, \quad u(t) \not\equiv 0 \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_m); \tag{5.2}$$

$$Lu \geqslant 0 \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_m). \tag{5.3}$$

Эта лемма, формулировка которой приводилась в [54], представляет собой, очевидно, полуэффективный критерий осцилляции на отрезке (с несингулярными концами). В одну сторону лемма 5.1 тривиальна: если $L \notin T_0[a, b]$, то в качестве $u(t)$ может быть выбрана любая функция из

$\mathfrak{N}[a,b]$, взятая с подходящим знаком. Обратную импликацию «существование $u(t) \to$ осцилляция» докажем от противного. Пусть $L \in T_0[a,b]$, несмотря на наличие $u(t)$, удовлетворяющей условиям (5.1)—(5.3) для некоторых точек $t_1, \ldots, t_m$ отрезка $[a,b]$. Имеются два случая: $u^{(k_m)}(t_m) < 0$ и $u^{(k_m)}(t_m) = 0$; покажем, что каждый из них невозможен. Чтобы исключить первый, заметим, что в этом случае

$$(-1)^{k_m} u(t_m - 0) < 0. \tag{5.4}$$

Пусть $Lu = f(t)$ и $G(t,s)$ есть функция Грина оператора L при интерполяционных краевых условиях (5.1); тогда

$$u(t) = \int_{t_1}^{t_m} G(t,s) f(s) ds \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_m). \tag{5.5}$$

Так как $f \geqslant 0$ в $[t_1, t_m]$ и $(-1)^{k_m} G(t_m - 0, s) \geqslant 0$ согласно предположению $L \in T_0[a,b]$ и лемме 4.2, то из (5.5) получаем $(-1)^{k_m} u(t_m - 0) \geqslant 0$, что противоречит (5.4). Переходим к случаю $u^{(k_m)}(t_m) = 0$. Пусть $\widetilde{\psi_v} J$ обозначает число компонент связности в множестве нулей функции $v(t) \in CJ$ на промежутке $J (0 \leqslant \widetilde{\psi_v} J \leqslant \infty)$. Непосредственно очевидна следующая модификация теоремы Ролля:

$$\{v \in C^{k-2} J, \varphi_v J \geqslant k \geqslant 3, \widetilde{\psi_v} J \geqslant 2\} \to \{\varphi_{\dot{v}} J \geqslant k-1, \widetilde{\psi_{\dot{v}}} J \geqslant 2\}. \tag{5.6}$$

Из предположения $L \in T_0[a,b]$ вытекает, что $L \in T_0(a_1, b_1)$ для некоторого интервала $(a_1, b_1) \supset [a,b]$; поэтому L допускает на (a_1, b_1) разложение (1.3). Рассмотрим функции

$$v_k = h_k \frac{d}{dt} \ldots h_1 \frac{d}{dt} h_0 u \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В силу соотношений $u^{(k_m)}(t_m) = 0$ и (5.1), $\varphi_{v_0}[t_1, t_m] = \varphi_u[t_1, t_m] \geqslant n + 1$; очевидно также, что $\widetilde{\psi}_{v_0}[t_1, t_m] \geqslant 2$. Исходя отсюда и применяя (5.6) последовательно к функциям $v_0(t), v_1(t), \ldots$, находим

$$\varphi_{v_k}[t_1, t_m] \geqslant n + 1 - k, \quad \widetilde{\psi}_{v_k}[t_1, t_m] \geqslant 2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5.7}$$

(множители $h_i(t)$, будучи гладкими и строго знакопостоянными в $[a,b]$ функциями, не влияют на подсчет величин типа φ и $\widetilde{\psi}$). С другой стороны, из условия $Lu = h_n \dot{v}_{n-1} \geqslant 0$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_m)$ вытекает нестрогая монотонность $v_{n-1}(t)$ на $[t_1, t_m]$, которая в свою очередь влечет за собой неравенство $\widetilde{\psi}_{v_{n-1}}[t_1, t_m] \leqslant 1$, противоречащее (5.7) при $k = n-1$.

Отметим, что лемму 5.1 можно было доказать несколько иначе, установив неравенство

$$\left.\frac{\partial^{k_m} G(t,s)}{\partial t^{k_m}}\right|_{t=t_m} > 0 \quad (t_1 < s < t_m),$$

после чего дело сводится к k_m-кратному дифференцированию равенства (5.5). Это потребовало бы сходных, но несколько более пространных рассуждений $\left(\text{в связи с разрывностью } \dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}\right)$.

Следствие 5.1. *Пусть $\underline{\beta} \neq \beta$. Если функция $u \in C_*^{n-1}U\_\beta$ такова, что $u(t) \not\equiv 0$ вблизи β и Lu знакопостоянна вблизи β, то $u(t) \neq 0$ вблизи β.*

В самом деле, предположим, что это не так и $u(t)$ колеблется при $t \uparrow \beta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $Lu \geqslant 0$ вблизи β (иначе заменим u на $-u$). Ясно, что в любой U_β найдутся точки t_1, $t_2, \ldots, t_m$, для которых выполняются условия (5.1) и (5.2). Поэтому согласно лемме 5.1 любая U_β есть промежуток осцилляции для L, т. е. $\underline{\beta} \neq \beta$, что противоречит условию.

Теперь достаточно прибегнуть к тому элементарному рассуждению, с которого начиналось доказательство леммы 2.1, чтобы установить

Следствие 5.2. *В условиях следствия 5.1 любое отношение вида $\dfrac{u(t)}{x(t)}$, где $x \in \mathfrak{M}'$, имеет (конечный или бесконечный) предел при $t \uparrow \beta$.*

5.2. Переходим к основной цели настоящего параграфа.

Теорема 5.1. *Пусть функции $z_i(t) \in C_*^{n-1}U\_\beta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям:*

$$[z; 1 \ldots k](t) \neq 0 \quad \textit{вблизи} \quad \beta \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1); \tag{5.8}$$

$$z_0 \lll z_1 \lll \ldots \lll z_n \quad (t \uparrow \beta); \tag{5.9}$$

$$(-1)^{n-k} L z_k \geqslant 0 \quad \textit{вблизи} \quad \beta \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{5.10}$$

Тогда $\underline{\beta} \neq \beta$ и для всякой ИФС при $t \uparrow \beta \{x_i\}$ уравнения $Lx = 0$ справедливы оценки

$$c_i z_{i-1}(t) \leqslant x_i(t) \leqslant d_i z_i(t) \quad \textit{вблизи} \quad \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.11}$$

где c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые положительные постоянные.

Соотношение $\underline{\beta} \neq \beta$ немедленно следует из леммы 2.6, согласно которой система $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ является $(+)$-декартовой вблизи β, и из следствия 4.1. При доказательстве оценок (5.11) мы также будем опираться на лемму 2.6, возможность применения которой подготовлена следствием 5.2.

Итак, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$– некоторая ИФС при $t \uparrow \beta$. Перепишем (5.10) в виде

$$(-1)^{n-k}[x_1, x_2, \ldots, x_n, z_k] \geqslant 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{5.12}$$

а (5.11) — в виде двух семейств оценок

$$x_i = O(z_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \uparrow \beta), \tag{5.13}$$

$$z_{i-1} = O(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \uparrow \beta). \tag{5.14}$$

Ниже постоянная оговорка «$t \uparrow \beta$» при асимптотических соотношениях для простоты опускается. Начнем с оценки

$$x_1 = O(z_1). \tag{5.15}$$

Чтобы убедиться в ее справедливости, предположим, что (5.15) не имеет места; согласно следствию 5.2 единственной альтернативой является соотношение

$$z_1 \lll x_1. \tag{5.16}$$

Но в этом случае, как показывают теорема об иерархии и неравенство (5.12) при $k = 1$, система функций z_1, x_1, $x_2, \ldots$, x_n в некоторой U_β удовлетворяет условиям леммы 2.6 (при $m = n + 1$, $r = 1$) и поэтому

$$[z_1, x_1, x_2, \ldots, x_n] \geqslant 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta. \tag{5.17}$$

Сопоставляя (5.12) и (5.17), заключаем, что вблизи β левая часть (5.17), тождественно равна нулю, т. е. z_1 удовлетворяет уравнению $Lz_1 = 0$, что явно несовместимо с (5.16).

Установим теперь следующую импликацию:

$$x_i = O(z_i) \to x_{i+1} = O(z_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1). \tag{5.18}$$

Опять-таки предположим противное: пусть при некотором i $(1 \leqslant i \leqslant n - 1)$ $x_i = O(z_i)$, $x_{i+1} \neq O(z_{i+1})$. Последнее соотношение согласно следствию 5.2 означает, что $x_{i+1} \ggg z_{i+1}$; так как, с другой стороны, $z_{i+1} \ggg z_i$, то

$$x_i \lll z_{i+1} \lll x_{i+1}. \tag{5.19}$$

Теорема 2.1 и соотношения (5.12), (5.19) показывают, что система функций x_1, $x_2, \ldots$, x_i, z_{i+1}, $x_{i+1}, \ldots$, x_n в некоторой U_β удовлетворяет условиям леммы 2.6 $(m = n + 1, r = i + 1)$, откуда

$$[x_1, \ldots, x_i, z_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \geqslant 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta.$$

Сопоставляя это с неравенством (5.12) при $k = i + 1$, заключаем, что вблизи β z_{i+1} является решением уравнения $Lx = 0$; тем самым получено противоречие с (5.19). Доказанная импликация (5.18) в сочетании с (5.15), очевидно, обеспечивает справедливость оценок (5.13).

Соотношения (5.14) доказываются с помощью аналогичного рассуждения, только осуществляемого в противоположном направлении — от больших индексов к меньшим. Исходной теперь является оценка

$$z_{n-1} = O(x_n) \tag{5.20}$$

после чего (5.14) устанавливается с помощью импликации

$$z_i = O(x_{i+1}) \to z_{i-1} = O(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.21}$$

Соотношения (5.20) и (5.21) докажем от противного по уже знакомой схеме. Если (5.20) не выполняется, т. е. $z_{n-1} \ggcurly x_n$, то система функций $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_{n-1}$ удовлетворяет вблизи β всем условиям леммы 2.6 (при $m = r = n+1$), так что ее вронскиан вблизи β неотрицателен и, следовательно, тождественно равен нулю в силу (5.12). С другой стороны, z_{n-1} не может быть в U_β решением уравнения $Lx = 0$, так как $z_{n-1} \ggcurly x_n$. Заметим, что (5.20) можно доказать и иначе, с помощью теоремы сравнения Чаплыгина. Далее, предполагая, что (5.21) не имеет места, и учитывая (5.9), получаем для некоторого $i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$

$$x_i \llcurly z_{i-1} \llcurly x_{i+1}. \tag{5.22}$$

Применение леммы 2.6 (при $m = n+1, r = i+1$) к системе $x_1, x_2, \ldots, x_i$, $z_{i-1}, x_{i+1}, \ \ldots, x_n$ дает $[x_1, \ldots, x_i, \ z_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \geqslant 0$ вблизи β. Ввиду (5.12) отсюда следует, что $Lz_{i-1} = 0$ в некоторой U_β, но это невозможно из-за (5.22).

Отметим, что оценки $x_n = O(z_n)$, $z_0 = O(x_1)$, будучи заключительными в процессе доказательства (5.13) и (5.14) соответственно, не использовались для получения остальных оценок; проверка соотношения $\underline{\beta} \neq \beta$ также не требует привлечения функций z_0, z_n. Поэтому, если любую из этих функций или обе сразу изъять из формулировки теоремы 5.1, те из оценок (5.11), в которых не фигурируют изъятые функции, останутся в силе.

5.3. В заключение остановимся на одном частном случае теоремы 5.1, представляющем, пожалуй, наибольший интерес для приложений:

$$\beta = \infty, \ z_i = e^{\nu_i t} \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \ (\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n).$$

Как и в формулировке следствия 4.2, здесь условие (5.10) может быть заменено адекватной характеристикой поведения корней уравнения

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t) = 0. \tag{5.23}$$

Следствие 5.3. *Пусть при всех достаточно больших t корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ уравнения (5.23) вещественны и удовлетворяют неравенствам*

$$\nu_0 \leqslant \lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \leqslant \nu_n, \tag{5.24}$$

где ν_i — некоторые постоянные ($\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$). Тогда для ИФС при $t \uparrow \beta$ уравнения $Lx = 0$ имеют место оценки

$$c_i e^{\nu_{i-1} t} \leqslant x_i(t) \leqslant d_i e^{\nu_i t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \geqslant t_0), \tag{5.25}$$

где c_i, d_i — некоторые положительные постоянные.

Это предложение отчасти сходно с так называемыми теоремами о «замораживании» (см. [64]), которые также позволяют оценивать рост решений (часто в форме неравенств для показателей Ляпунова) уравнения $Lx = 0$ или, в более общем случае, системы уравнений $\dot{X} = A(t)X$, исходя из равномерных по t в некоторой U_∞ ограничений на коэффициенты. Вот типичная форма теоремы о замораживании (для уравнения $Lx = 0$): если при всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \leqslant \nu$, $|p_i(t)| \leqslant p$, $|p_i(t_1) - p_i(t_2)| \leqslant k|t_1 - t_2|$, то для любого $x \in \mathfrak{M}'$ справедлива оценка

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t} \leqslant \nu + f_n(p,k). \tag{5.26}$$

Вид функции $f_n(p,k)$ варьируется у различных авторов, но, как правило, $f_n(p,0) \equiv 0$, $f_n(p,k) > 0$ при $k > 0$. Эта функция представляет собой, так сказать, «надбавку на переменность коэффициентов».

Метод замораживания имеет значительно более широкую область применимости, нежели следствие 5.3 (если ограничиться уравнениями с коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица). С другой стороны, традиционная методика замораживания, по-видимому, не позволяет из (5.24) извлечь оценки (5.25) или хотя бы оценку сверху для показателей Ляпунова

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t} \leqslant \nu_n \quad (x \in \mathfrak{M}'), \tag{5.27}$$

которая, в отличие от (5.26) не содержит никаких «надбавок». Напомним также, что следствие 5.3 получено без каких-либо предположений о гладкости или непрерывности коэффициентов. То обстоятельство, что метод замораживания обеспечивает оценку (5.26) не только для x, но одновременно и для $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\ldots, x^{(n-1)}$, не играет здесь особой роли, поскольку и (5.27) сохраняет силу при замене x на $x^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что из (5.24) вытекает ограниченность в U_∞ коэффициентов p_1, p_2,…, p_n и воспользоваться следующим результатом.

Теорема 5.2 (Теорема Эсклангона). *Если коэффициенты оператора L ограничены в U_∞ и некоторое $x \in \mathfrak{M}$ имеет вид $x = O(e^{\nu t})$ при $t \to \infty$, то*

$$x^{(k)} = O(e^{\nu t}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \to \infty). \tag{5.28}$$

Сам Эсклангон рассматривал в [65] случай $\nu = 0$, к которому, однако, беспрепятственно сводится случай произвольного ν. Действительно, уравнение $Lx = 0$ после подстановки $x = e^{\nu t}y$ и умножения на $e^{-\nu t}$ перейдет в уравнение $L_1 y = 0$; легко видеть, что поскольку коэффициенты оператора L ограничены при $t \geqslant t_0$, это же верно и для оператора L_1. Так как $y = O(1)$

при $t \to \infty$, то согласно [65]

$$y^{(k)} = e^{-\nu t} \sum_{m=0}^{k} C_k^m (-\nu)^m x^{(k-m)} = O(1) \quad (k = 1, 2, \dots, n)\ (t \to \infty).$$

Отсюда легко получаем (5.28) с помощью линейного комбинирования, поскольку соответствующая треугольная матрица, очевидно, невырождена.

Теорема Эсклангона вместе с (5.25) показывает, что *в условиях следствия 5.3 при любом i,* $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i^{(k)}(t) = O(e^{\nu_i t})$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ $(t \to \infty)$.

Литература

1. *Polia, G.* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation / G. Polia // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1924. — Vol. 24. — P. 312—324.
2. *Mammana, G.* Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzi ali lineari / G. Mammana // *Math. Z.* — 1931. — Vol. 33. — P. 186—231.
3. *Hartman, P.* Unrestricted n-parameter families / P. Hartman // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. — 1958. — Vol. 7(2). — P. 123—142.
4. *Беккенбах, Э.* Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М.: Мир, 1965. — 276 с.
5. *Бернштейн, С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть первая / С. Н. Бернштейн. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — 203 с.
6. *Бернштейн, С. Н.* О базе системы Чебышёва / С. Н. Бернштейн // *Изв. АН, сер. матем.* — 1938. — Т. 2:2, № 5-6. — С. 499—504.
7. *Крейн, М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1938. — Т. 18, № 4–5. — С. 245—249.
8. *Чичкин, Е. С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач / Е. С. Чичкин // *Изв. вузов, Матем.* — 1962. — Т. 2. — С. 170—179.
9. *Левин, А. Ю.* О многоточечной краевой задаче: Дис... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1962. — 112 с.
10. Некоторые краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений / А. В. Кибенко, М. А. Красносельский, А. Ю. Левин, А. И. Перов // Труды IV Всесоюз. матем. съезда. — Л., 1964. — Т. 2. — С. 437—444.
11. *Левин, А. Ю.* О распределении нулей решений линейного дифферен-

циального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1281—1284.

12. *Mikusinski, I.* Sur léquation $x^{(n)} + A(t)x = 0$ / I. Mikusinski // *Ann. Polon. Math.* — 1955. — Vol. 1, no. 2. — P. 207—221.
13. *Хохряков, А. Я.* К вопросу о периодической краевой задаче для дифференциального уравнения третьего порядка / А. Я. Хохряков // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 63, № 4. — С. 639—645.
14. *Пак, С. А.* К вопросу о дифференциальных неравенствах для краевых задач: Дис... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1964.
15. *Юберев, Н. Н.* О линейной периодической краевой задаче для уравнений в конечных разностях / Н. Н. Юберев // *Дифф. уравнения*. — 1966. — Т. 2, № 6. — С. 784—790.
16. *Колесов, Ю. С.* О знаке функции Грина некоторых периодических краевых задач / Ю. С. Колесов, А. Ю. Левин // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1967. — Вып. 1. — С. 40—43.
17. *Bellman, R.* A note on the identification of linear systems / R. Bellman // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1966. — Vol. 17, no. 1. — P. 68—71.
18. *Чуриков, В. А.* Об условиях существования функции Грина краевой задачи / В. А. Чуриков // *Дифф. уравнения*. — 1966. — Т. 2, № 9. — С. 1184—1192.
19. *Глазман, И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов / И. М. Глазман. — М.: Физматгиз., 1963. — 339 с.
20. *Крейн, М. Г.* Sur les opérateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques / М. Г. Крейн // *Матем. сб.* — 1937 . — Vol. 2(44), no. 6. — P. 1023—1072.
21. *Кондратьев, В. А.* О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка / В. А. Кондратьев // *Труды Моск. матем. о-ва*. — 1959. — № 8. — С. 259—281.
22. *Ахундов, А. М.* О решениях дифференциального уравнения / А. М. Ахундов, А. Тораев // *Изв. АН Туркм. ССР, сер. физ.-техн., хим. и геол. наук*. — 1964. — № 1. — С. 21—23.
23. *Moldovan, E.* Asupra notiunii de functie convexă fată de o multime interpolatoare / E. Moldovan // *Studii si cercet. de matem. (Cluj)*. — 1958. — Vol. 9. — P. 161—224.
24. *Aramă, O.* Sur un théorème de W. A. Markov / O. Aramă // *Math. (RPR)*. — 1961. — Vol. 3, no. 2. — P. 197—216.
25. *Markov, W. A.* Über Polinome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen / W. A. Markov // *Math. Ann.* — 1916. — Vol. 77. — P. 213—258.
26. *Левин, А. Ю.* Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1968. — Т. 75

(117), № 1. — С. 39—63.

27. *Жуковский, Н. Е.* Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$ / Н. Е. Жуковский // *Матем. сб.* — 1892. — Т. 16, вып. 3. — С. 582—591.
28. *Крейн, М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости / М. Г. Крейн // *ПММ.* — 1951. — Т. 15, вып. 3. — С. 323—348.
29. *Якубович, В. А.* Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$ / В. А. Якубович // *ДАН СССР.* — 1950. — Т. 74, № 5. — С. 901—903.
30. *Гантмахер, Ф. Р.* О несимметрических ядрах Келлога / Ф. Р. Гантмахер // *ДАН СССР.* — 1936. — Т. 1, № 1. — С. 3—5.
31. *Крейн, М. Г.* О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / М. Г. Крейн // *ДАН СССР.* — 1939. — Т. 25, № 8. — С. 643—646.
32. *Крейн, М. Г.* Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка / М. Г. Крейн // *ДАН СССР.* — 1939. — Т. 25, № 9. — С. 717—720.
33. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.
34. *Калафати, П. Д.* О функциях Грина обыкновенных дифференциальных уравнений / П. Д. Калафати // *ДАН СССР.* — 1940. — Т. 26, № 6. — С. 535—539.
35. *de la Vallée Poussin, C.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n / C. de la Vallée Poussin // *J. Math. Pures et Appl. (9).* — 1929. — Vol. 8. — P. 125—144.
36. *Бессмертных, Г. А.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г. А. Бессмертных, А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 471—474.
37. *Bobrowski, D.* O odleglośki między zerami pewnych rozwišzań równania rózniczkowego liniowego czwartego rzędu / D. Bobrowski // *Zesz. nauk. Politechn. poznańsk.* — 1965. — Vol. 29. — P. 55—60.
38. *Зайцева, Г. С.* О многоточечной краевой задаче / Г. С. Зайцева // *ДАН СССР.* — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 763—765.
39. *Сансоне, Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Д. Сансоне. — М.: ИЛ, 1953. — Т. 1. — 346 с.
40. *Borg, G.* Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen / G. Borg // *Ark. Mat. Astron. Fys. A.* — 1944. — Vol. 31, no. 1. — P. 460—482.

41. *Левин, А. Ю.* Об одном критерии устойчивости / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1962. — Т. 17, № 3(105). — С. 211—212.
42. *Левин, А. Ю.* К вопросу о нулевой зоне устойчивости / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1221—1223.
43. *Epheser, H.* Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung / H. Epheser // *Math. Z.* — 1955. — Vol. 61. — P. 435—454.
44. *Левин, А. Ю.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 153, № 6. — С. 1257—1260.
45. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
46. *Комленко, Ю. В.* Условия разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка / Ю. В. Комленко // *ДАН СССР*. — 1967. — Т. 174, № 5. — С. 1018—1020.
47. *Lasota, A.* L'application du principe de Pontriagin a revaluation de l'intervalle d'existence et d'unicite des solutions d'un probleme aux limites / A. Lasota, Z. Opial // *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astr. et Phys.* — 1963. — Vol. 11, no. 2. — P. 41—46.
48. *Кондратьев, В. А.* О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ / В. А. Кондратьев // *Труды Моск. матем. о-ва*. — 1961. — № 10. — С. 419—436.
49. *Левин, А. Ю.* Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 159, № 1. — С. 13—16.
50. *Мираков, В. Е.* Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина / В. Е. Мираков // *ДАН СССР*. — 1966. — Т. 170, № 4. — С. 776—779.
51. *Чаплыгин, С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 102 с.
52. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. — М.: Физматгиз, 1963. — 248 с.
53. *Schröder, J.* Ungleichunden und Fehlerabschätzungen / J. Schröder // *Труды Международного конгресса математиков.* — М.: Мир, 1968. — С. 101—129.
54. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512—515.
55. *Азбелев, Н. В.* К вопросу об оценке числа нулей решений уравнения $y'''+p(x)y'+q(x)y = 0$ / Н. В. Азбелев // *НДВШ, физ.-матем. науки*. — 1958. — № 3. — С. 5—7.

56. *Азбелев, Н. В.* К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка / Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк // *Матем. сб.* — 1960. — Т. 51(93), № 4. — С. 475—486.
57. *Левин, А. Ю.* Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 64(106), № 3. — С. 396—409.
58. *Полиа, Г.* Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сёге. — М.: Гостехиздат, 1956. — Т. 2. — 432 с.
59. *Тептин, А. Л.* Теоремы о разностных неравенствах для n-точечных разностных краевых задач / А. Л. Тептин // *Матем. сб.* — 1963. — Т. 62, № 3. — С. 345—370.
60. *Feckete, M.* Über ein Problem von Laguerre / M. Feckete // *Rend. Circ. Matem. di Palermo*. — 1912. — Vol. 34. — P. 89—100.
61. *Aramă, O.* Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuatii diferentiale liniare / O. Aramă // *Studii si cercet. de matem. (Cluj)*. — 1959. — Vol. 10. — P. 207—257.
62. *Покорный, Ю. В.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи / Ю. В. Покорный // *Матем. заметки*. — 1968. — Т. 4, № 5. — С. 533—540.
63. *Тептин, А. Л.* Об оценке промежутка неосцилляции разностного уравнения и разностных краевых задач / А. Л. Тептин // *Дифф. уравнения*. — 1966. — Т. 2, № 11. — С. 1449—1468.
64. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / В. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
65. *Esclangon, E.* Nouvelles Recherches sur les Fonctions Quasiperiodiques / E. Esclangon // *Anne Observatoire de Bordeaux*. — 1917. — Vol. 16. — P. 51—226.
66. *Hartman, P.* Mean value theorems and linear operators / P. Hartman, A. Wintner // *Amer. Math. Monthly*. — 1955. — Vol. 62. — P. 217—222.
67. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

Примечание при корректуре. Автор недавно узнал о весьма интересной (хотя и не свободной от неточностей) заметке Ф. Хартмана (Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 74, № 1. (1968)). Результаты, анонсированные в этой заметке, и некоторые из установленных выше фактов тесно соприкасаются.

7. Повторение игр двух лиц на больших интервалах времени[8]

Теория антагонистических игр двух лиц после Бореля и фон Неймана развивалась и обобщалась в различных направлениях; по этому поводу см., например, [1]. Предлагаемый ниже подход, по-видимому, не обсуждался, хотя представляется весьма естественным. Суть его, кратко говоря, состоит в учете фактора времени.

Рассмотрим встречу двух игроков, на протяжении которой они проводят между собой ряд партий в одну и ту же матричную игру с нулевой суммой. Каждая партия продолжается положительное время; наряду с платежной матрицей $A = ||a_{ij}||$ задана также матрица $T = ||t_{ij}||$, где t_{ij} — средняя продолжительность партии при выборе I и II игроками соответственно i-й и j-й чистых стратегий. Будем предполагать (хотя это, возможно, и не очень существенно), что конечны соответствующие дисперсии σ_{ij}^2 продолжительностей партий. Общее время встречи либо фиксировано заранее, либо, более общо, есть случайная величина, независимая по отношению к ходу игры. (Таким образом число партий во встрече также есть случайная величина, которая, однако, зависит от хода игры). Нас будет интересовать случай, когда математическое ожидание t времени встречи велико по сравнению со всеми $t_{ij}\sigma_{ij}$. Это позволит игнорировать «краевой эффект» последней партии, которая — если она не окончилась в момент окончания встречи — может в зависимости от регламента либо аннулироваться, либо доигрываться, либо приводить к некоторому частичному платежу. Краевой эффект сильно осложняет нахождение точных оптимальных стратегий; однако, если считать t большим и подходить к делу с асимптотической точки зрения, вкладом единичной партии можно пренебречь.

Предполагается, что оба игрока, как и обычно, стремятся максимизировать гарантированное значение математического ожидания своего выигрыша за встречу. Какие стратегии они должны применять?

Ясно, что стандартные оптимальные по Нейману стратегии для игры с матрицей A здесь, вообще говоря, непригодны, поскольку они не учитывают фактора времени: небольшие частые выигрыши могут оказаться выгоднее крупных, но редких. Имеются два основных случая, когда стратегии, оптимальные в игре с матрицей A, остаются оптимальными (точнее асимптотически оптимальными, см. ниже) и здесь: а) когда игра с матрицей A безобидна; б) когда все t_{ij} равны. Это важные, но все же частные случаи; во многих реальных игровых ситуациях продолжительность партий сильно колеблется в зависимости от избираемых игроками стратегий.

[8]Левин А. Ю. Повторение игр двух лиц на больших интервалах времени // ДАН СССР. — 1970. — Т. 192, № 1. — С. 23—25.

Может показаться, что задача сводится к решению игры с матрицей $H = ||h_{ij}||$, где $h_{ij} = a_{ij}/t_{ij}$ суть платежи «на единицу времени». Это верно лишь отчасти. Легко видеть, что если у матрицы H есть седловая точка h_{kl}, то k-я и l-я чистые стратегии игроков I и II соответственно асимптотически оптимальны; при этом I выигрывает за одну встречу в среднем $\sim h_{kl}t$. Но в наиболее интересном случае, когда H не обладает седловой точкой, оптимальные смешанные стратегии игры с матрицей H не являются, вообще говоря, асимптотически оптимальными для рассматриваемой игры.

Способ определения асимптотически оптимальных стратегий в общем случае основан на решении следующего скалярного уравнения:

$$(\text{цена игры с матрицей} \quad A - \lambda T) = 0. \tag{1}$$

Так как все $t_{ij} > 0$, то левая часть (1) строго убывает по λ и уравнение (1), очевидно, имеет единственный корень λ_0. *Стратегии, оптимальные по Нейману для игры с матрицей $A - \lambda_0 T$, являются асимптотически оптимальными для игры, описанной выше; при этом средний выигрыш I игрока за встречу равен $\lambda_0 t + O(1)$, где $O(1)$ мажорируется величиной, не зависящей от t.*

Термин асимптотически оптимальный означает, что применение этих стратегий приводит к среднему выигрышу за встречу, не более чем на $O(1)$ отклоняющемуся от среднего выигрыша при строго оптимальных стратегиях; здесь $O(1)$ опять-таки не зависит лишь от t. Также и в отдельно взятой встрече вероятность выполнения неравенства

$$\left| \frac{\text{выигрыш } I}{t} - \lambda_0 \right| > \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \quad \text{произвольно})$$

при оптимальном поведении игроков стремится к нулю с ростом t (при фиксированных распределениях платежей и продолжительностей партий). Отметим, что строго оптимальные стратегии не являются, вообще говоря, однородными по времени; для их отыскания (которое, видимо, представляет собой трудоемкую задачу) необходимо знать функции распределения времени встречи и отдельных партий, а также регламент последней партии.

Наметим вкратце схему доказательства. Так как игра с матрицей $A - \lambda_0 T$ безобидна, то, согласно сделанному выше замечанию, оптимальные стратегии этой игры асимптотически оптимальны во встрече с платежной матрицей $A - \lambda_0 T$ и матрицей продолжительностей T. При этом средний выигрыш I в такой встрече, есть, очевидно, $O(1)$ для сколь угодно больших t. Сравним теперь встречу с матрицами A, T и встречу с матрицами $A - \lambda_0 T$, T. При любом конкретном выборе игроками своих смешанных стратегий в первом случае I получит за встречу в среднем на $\lambda_0 t$ (с точностью до $O(1)$) больше, чем во втором. Действительно, после каждой отдельной партии, кроме незакончившейся, I получает в среднем дополнительно $\lambda_0 t_{ij}$, где i, j — номера реализованных чистых стратегий; но математическое ожидание суммы t_{ij} по всем сыгранным за встречу партиям с точностью до $O(1)$ совпадает с t. Сопоставляя эти соображения (которые допускают аккуратное обоснование), приходим к требуемому.

Уравнение (1) ввиду монотонности левой части можно приближенно решить с помощью «половинения». Начальный отрезок определяется по матрице H согласно легко проверяемому неравенству

$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant \lambda_0 \leqslant \min_j \max_i h_{ij}.$$

Если оптимальные стратегии в игре с матрицей $A - \lambda_0 T$ единственны, то после некоторого числа шагов удастся «нащупать» активные чистые стратегии игроков. Обозначим соответствующие подматрицы A и T через A_0, T_0 (в случае единственности они квадратны), можно после этого найти λ_0 как корень алгебраического уравнения $\det \|A - \lambda T\| = 0$, лежащий в полученном интервале.

За исключением последнего замечания сказанное распространяется и на бесконечные игры. При этом в общем случае следует, естественно, говорить не об (асимптотически) оптимальных, а об (асимптотически) ε-оптимальных стратегиях.

В заключение приведем численный пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

Если I применит во встрече стратегию $(1/2, 1/2)$, оптимальную для него в обычном смысле, т.е. без учета времени, то при лучшем ответе II (2-я стратегия) I выиграет за одну встречу в среднем $\sim t/7$ $(t \gg 1)$. В игре с матрицей

$$H = \left\|\frac{a_{ij}}{t_{ij}}\right\| = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & -15 & 20 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

оптимальной по Нейману для I является стратегия $(2/7, 5/7)$; однако при ее применении I будет даже проигрывать — в среднем $\sim t/18$ за встречу (если II изберет 3-ю стратегию). Решая уравнение (1), находим $\lambda_0 = (45 - \sqrt{1929})/6 \approx 0,18$. Таким образом, при асимптотически оптимальных стратегиях I и II, которые приближенно равны $(0,47; 0,53)$ и $(0; 0,59; 0,41)$, математическое ожидание выигрыша I за встречу $\approx 0,18t$.

Автор признателен В. М. Гранину и Б. Н. Садовскому за обсуждение.

Литература

1. *Льюс, Р.* Игры и решения. Введение и критический обзор / Р. Льюс, Х. Райфа. — М.: ИЛ, 1961. — 642 с.

8. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения[9]. I

§ 1. Разрешимость задачи Коши

1.1. Классическому вопросу о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения с заданными начальными условиями посвящена весьма обширная литература, где изучался, в основном, нелинейный случай. Ниже этот вопрос исследуется для линейного уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1.1}$$

где $-\infty < a < b < \infty$. Комплекснозначные функции $p_i(t)$, $i = 1, \dots, n+1$, предполагаются локально суммируемыми в полуинтервале $(a, b]$, но могут иметь несуммируемые особенности в точке $t = a$. Под решением уравнения (1.1), естественно, понимается функция $x(t) \in C^{n-1}[a, b]$ такая, что:
1) $x^{n-1}(t)$ абсолютно непрерывна в каждом отрезке $[a_1, b]$ при $a_1 \in (a, b)$;
2) равенство (1.1) имеет место почти при всех t из $[a, b]$.

Выясним, каковы должны быть $p_i(t)$, чтобы для уравнения (1.1) была разрешима любая задача Коши в точке $t = a$, т.е. чтобы при любых числах $c_1, c_2, \dots, c_n$ существовало решение (1.1) такое, что

$$x^{(i-1)}(a) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.2}$$

Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 1.1. *Для того, чтобы задача Коши* (1.1)—(1.2) *имела решение при любых $c_1, c_2, \dots, c_n$, необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы*

$$\int\limits_a p_1(t)\,dt, \quad \int\limits_a \Big(\exp\int\limits^t p_1(s)\,ds\Big) p_i(t)\,dt, \quad i = 2, 3, \dots, n+1. \tag{1.3}$$

Это же условие эквивалентно единственности решения задачи (1.1)—(1.2) при любых $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Конечно, имеется в виду неабсолютная сходимость интегралов. Непроставленные пределы интегрирования могут быть выбраны в $(a, b]$ произвольно, так как не влияют на сходимость. От других результатов на эту тему сформулированная теорема отличается своей окончательностью. В нелинейном случае подобный эффективный критерий, по-видимому, не может быть

[9]Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестник Ярославского университета. — 1973. — Вып. 5. — С. 105—132.

указан даже для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, где x — скаляр. Как будет видно, помимо линейности, существенную роль играет также то обстоятельство, что мы имеем дело именно с уравнением n-го порядка (а не с линейной системой общего вида).

1.2. Переходим к доказательству, которое основано на сочетании нескольких простых соображений.

Заметим, прежде всего, что в силу линейности уравнения (1.1) утверждения «при любых c_i задача (1.1)—(1.2) имеет не менее одного решения» и «при любых c_i задача (1.1)—(1.2) имеет не более одного решения» эквивалентны. Поэтому будем говорить лишь о разрешимости задачи Коши, имея в виду, что эта разрешимость автоматически является однозначной.

Избавимся от неоднородности в уравнении (1.1) с помощью следующего приема. Введем фиктивную переменную y_0 и рассмотрим систему из $n+1$ уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{y}_0 = 0, \\ &\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ &\dot{y}_n = -p_{n+1} y_0 - p_n y_1 - \cdots - p_1 y_n, \end{aligned} \tag{1.4}$$

для решения которой также задаются начальные условия при $t = a$:

$$y_i(a) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Разрешимость задачи (1.1)—(1.2) при любых c_i эквивалентна разрешимости задачи (1.4)—(1.5) при любых c_i. В самом деле, ввиду очевидной связи между уравнениями (1.1) и системой (1.4) мы должны лишь убедиться, что задача (1.4)—(1.5) разрешима при любых $c_0, c_1, \ldots, c_n$, если она разрешима при $c_0 = 1$ и любых $c_1, \ldots, c_n$. Если обозначить решение задачи (1.4)—(1.5) через $y(t; c_0, c_1, \ldots, c_n)$, то сказанное непосредственно вытекает из очевидных соотношений

$$\begin{aligned} &y(t; c_0, c_1, \ldots, c_n) = y(t; 1, \frac{c_1}{c_0}, \ldots, \frac{c_n}{c_0}) \quad \text{при} \quad c_0 \neq 0, \\ &y(t; 0, c_1, \ldots, c_n) = y(t; 1, c_1, \ldots, c_n) - y(t; 1, 0, \ldots, 0). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Итак, от неоднородности мы избавились. Следующий шаг состоит в переходе к матричному уравнению:

$$\dot{Y} = P(t)Y \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1.7}$$

где через $P(t)$ обозначена матрица коэффициентов системы (1.4):

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -p_{n+1} & -p_n & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & -p_1 \end{pmatrix}$$

По аналогии с предыдущим матрица $n+1$-го порядка $Y(t)$ в (1.7) предполагается непрерывной в точке $t = a$ и абсолютно непрерывной в $(a, b]$ (т.е. в любом отрезке вида $[a_1, b]$, $a < a_1 < b$).

Разрешимость задачи (1.4)—(1.5), очевидно, эквивалентна существованию у (1.7) решения, удовлетворяющего условию

$$Y(a) = I. \tag{1.8}$$

Таким образом, установлена

Лемма 1.1. *Задача* (1.1)—(1.2) *разрешима при любых* $c_1, \dots, c_n$ *в том и только том случае, если разрешима задача* (1.7)—(1.8).

Рассмотрим теперь пару задач для матриц одного порядка

$$\dot{U} = A(t)U, \quad U(a) = I, \tag{1.9}$$

$$\dot{Y} = [A(t) + B(t)]Y, \quad Y(a) = I. \tag{1.10}$$

Лемма 1.2. *Если* $B(t)$ *суммируема в* $[a, b]$ *, то задачи* (1.9) *и* (1.10) *разрешимы или неразрешимы одновременно.*

Из соображений симметрии достаточно показать, что существование решения $U(t)$ задачи (1.9) влечет за собой существование решения $Y(t)$ задачи (1.10). Положим

$$Y(t) = U(t)W(t), \tag{1.11}$$

тогда

$$\dot{Y} = AUW + U\dot{W} = (A + B)UW.$$

Отсюда

$$\dot{W} = C(t)W, \tag{1.12}$$

где $C(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t)$. Так как $U(t)$, $U^{-1}(t)$ непрерывны в $[a, b]$, то из суммируемости $B(t)$ в $[a, b]$ вытекает суммируемость $C(t)$ в $[a, b]$. Уравнение (1.11) для W является поэтому несингулярным и, следовательно, обладает решением, удовлетворяющим условию $W(a) = I$. Как известно, $W(t)$ может быть представлено сходящимся рядом

$$W(t) = I + \int_a^t C(t_1)\,dt_1 + \int_a^t C(t_1)\,dt_1 \int_a^{t_1} C(t_2)\,dt_2 + \ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.13}$$

Требуемое решение задачи (1.10) дается формулой (1.11). Лемма 1.2 доказана.

Возвращаясь к уравнению (1.7), представим матрицу $P(t)$ в виде $P(t) = A(t) + B$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ -p_{n+1} & \ldots & -p_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Так как $B(t)$ суммируема на $[a, b]$, то, согласно лемме 1.2, разрешимость задачи (1.7)—(1.8) эквивалентна разрешимости задачи (1.9). Смысл всех этих переходов заключается в том, что мы пришли к уравнению $\dot{U} = AU$, которое интегрируется в квадратурах. Решая его, находим, что матрица $U(t) = \|u_{ij}(t)\|_1^{n+1}$, удовлетворяющая условию $U(a) = I$, если она существует, должна иметь следующий вид: все ее строки, кроме последней, совпадают с соответствующими строками единичной матрицы (порядка $n+1$), а элементы $(n+1)$-й строки определяются равенствами:

$$u_{n+1,j}(t) = -\int_a^t \exp\Big(\int_t^s p_1(\tau)\,d\tau\Big) p_{n+2-j}(s)\,ds, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.15}$$

$$u_{n+1,n+1}(t) = \exp\Big(-\int_a^t p_1(\tau)\,d\tau\Big). \tag{1.16}$$

Эти функции определены и удовлетворяют необходимому соотношению $u_{n+1,j}(a) = \delta_{n+1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, если интегралы (1.3) сходятся.

Обратная зависимость также имеет место, в чем проще всего убедиться, начиная с $u_{n+1,n+1}(t)$. Теорема доказана.

1.3. Сделаем несколько замечаний по поводу доказанного предложения.

Отметим, во-первых, что, наряду с самим фактом существования решения задачи Коши, получена также возможность приближенного нахождения этого решения с помощью ряда (1.13). При этом существенно, что в нашем случае $B(t)$, а следовательно, и $C(t)$, не только суммируемы, но и непрерывны. Отсюда следует, что если ограничиться k первыми членами ряда (1.13), то при $t \to 0$ погрешность имеет порядок $O(t^k)$; это относится, конечно, не только к (1.13), но и к (1.11), поскольку $U(t)$ непрерывна. Подчеркнем, что сами интегралы (1.3) могут сходиться сколь угодно медленно; все «неприятности», связанные с плохим поведением $p_i(t)$, как бы впитывает в себя матрица $U(t)$.

Естественным является вопрос о том, насколько существенно, что в уравнении (1.1) x — скаляр. Последнее обстоятельство по существу использовалось лишь в самом конце доказательства, при решении матричного уравнения $\dot{U} = AU$; именно, мы записали решение уравнения

$$\dot{u}_{n+1,n+1} = -p_1(t)u_{n+1,n+1}$$

в виде (1.16). Если $p_1, u_{n+1,n+1}$, в свою очередь, являются матрицами порядка выше первого, то такая запись законна, например, при $p_1 = \mathrm{const}$. В частности, при $p_1(t) \equiv 0$, когда условия (1.3) приобретают особенно простой вид и сводятся к сходимости интегралов

$$\int\limits_a p_i(t)\,dt, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1,$$

теорема 1.1 сохраняет силу для матричного (или векторного) уравнения любой размерности. Можно также считать $x(t)$ и $p_i(t)$ функциями скалярного аргумента со значениями в некоторой банаховой алгебре с единицей; интегрирование при этом понимается по Бохнеру. При таких обобщениях следует несколько видоизменить соотношения (1.6), основываясь на том факте, что всякий элемент C_0 алгебры может быть представлен как разность двух обратимых элементов.

Другое возможное обобщение теоремы 1.1 заключается в том, что переменная t может пробегать многообразия, отличные от отрезка вещественной прямой. В частности, t может меняться в ограниченной односвязной области D комплексной плоскости, если $p_1(t), \ldots, p_{n+1}(t)$ аналитичны в D (тем самым обеспечена однозначность первообразных от p_i). Относительно лежащей на границе области D точки $t = a$ предполагается, что она может быть соединена с какой-либо (а следовательно, и с любой) точкой D спрямляемой кривой, целиком лежащей в D. Под решением задачи (1.1)—(1.2) понимается функция $x(t)$, аналитическая и удовлетворяющая уравнению (1.1) при $t \in D$ и такая, что

$$x^{(i-1)}(t) \to c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{при} \quad t \to a, \quad t \in D.$$

Теорема 1.1 дает характеристику особенностей $p_i(t)$ в точке $t = a$, которые не влияют на разрешимость задачи Коши.

Проиллюстрируем это на примере. Пусть $a = 0$ и область состоит из таких $t = u + iv \in D$, что

$$0 < u < 1, \quad |v| < u^k,$$

где k — некоторое число. Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} + t^m (\ln t)^r \sin \frac{1}{t}\, x = 0 \quad (t \in D);$$

для определенности пусть имеется в виду главное значение $\ln t$; m, r — некоторые целые числа. Используя теорему 1.1 и несложные выкладки, получаем, что для разрешимости задачи Коши с любыми начальными данными при $t = 0$ необходимо и достаточно следующее (не зависящее от n) условие:

$$k \geqslant 2 \quad \text{и либо} \quad m > -2, \quad \text{либо} \quad m = 2, \quad r < 0.$$

Следует подчеркнуть, что конечность точки $t = a$ является в теореме 1.1 весьма важным условием, которое не может быть отброшено. Оно не имело, правда, значения для лемм 1.1 и 1.2 (если понимать решение задачи Коши асимптотически), но существенно использовалось, когда понадобилась суммируемость постоянной матрицы B.

1.4. Несмотря на последнее замечание, теорема 1.1 имеет довольно любопытные приложения к изучению асимптотики решений при $t \to \infty$. Продемонстрируем одно из таких приложений, причем ограничимся уравнением

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (t_0 \leqslant t < \infty). \tag{1.17}$$

Известно следующее предложение.

Теорема 1.2 (Э. Хилле [1], см. также А. Халанай [2]). *Для того, чтобы уравнение* (1.17) *обладало системой решений вида*

$$\left.\begin{array}{ll} x_1(t) = t + o(1), & \dot{x}_1(t) = 1 + o\Big(\dfrac{1}{t}\Big), \\ x_2(t) = 1 + o\Big(\dfrac{1}{t}\Big), & \dot{x}_2(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big), \end{array}\right. \quad (t \to \infty). \tag{1.18}$$

достаточно, а в случае знакопостоянной $q(t)$ *и необходимо, чтобы*

$$\int^{\infty} t^2 |q(t)|\, dt < \infty.$$

Из теоремы 1.1 вытекает, что при любой — знакопеременной, комплекснозначной или даже абстрактной $q(t)$ имеет место

Следствие 1.1. *Уравнение* (1.17) *обладает системой решений вида* (1.18) *в том и только том случае, если*

$$\int^{\infty} t^2 q(t)\,dt \tag{1.19}$$

сходится.

Очевидно, это обобщает результат Хилле и притом существенно, поскольку методика работ [1], [2] не приспособлена для условно сходящихся интегралов.

Докажем следствие 1.1. Произведем замену переменной и функции, положив

$$s = \frac{1}{t}, \quad y(s) = sx\Big(\frac{1}{s}\Big).$$

Тогда, как нетрудно подсчитать, уравнение (1.17) примет вид

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{s^4}q\Big(\frac{1}{s}\Big)y = 0 \quad (0 < s \leqslant s_0). \tag{1.20}$$

Применяя теорему 1.1, заключаем, что в том и только том случае, если сходится интеграл

$$\int_0 \frac{1}{s^4}q\Big(\frac{1}{s}\Big)\,ds, \tag{1.21}$$

уравнение (1.20) обладает системой решений вида

$$\begin{aligned} &y_1(s) = 1 + o(s), \quad \frac{dy_1}{ds} = o(1),\\ &y_2(s) = s + o(s), \quad \frac{dy_2}{ds} = 1 + o(1), \end{aligned} \qquad (s \downarrow 0). \tag{1.22}$$

Возвращаясь к переменной t, видим, что сходимость интеграла (1.21) есть не что иное, как (1.19). Далее, из (1.22) находим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{y_1(s)}{s} = \frac{1}{s} + o(1) = t + o(1),\\ \dot{x}_1(t) &= -s^2\frac{d}{ds}\left(\frac{y_1}{s}\right) = y_1 - s\frac{dy_1}{ds} = 1 + o\Big(\frac{1}{t}\Big). \end{aligned}$$

Для $x_2(t)$ таким путем, правда, получаются менее точные, чем (1.18) соотношения: $x_2 = 1 + o(1)$, $\dot{x}_2 = o\left(\frac{1}{t}\right)$. Необходимость (1.19), таким образом, доказана.

Что касается уточнения оценок для x_2, $\dot{x}_2$, то в скалярном случае проще всего воспользоваться формулой

$$x_2(t) = x_1(t)\int_t^{\infty}\frac{d\tau}{x_1^2(\tau)}$$

и полученными уже соотношениями для x_1, $\dot{x}_1$. Это завершает доказательство для скалярного случая. Однако, если нас интересует распространение результата на тот случай, когда в (1.17) x и q — матрицы или, более общо, элементы банаховой алгебры (при этом правые части в (1.18) и подобных соотношениях понимаются, конечно, как коэффициенты при единице алгебры), то следует прибегнуть к разложению (1.13), где роль t сейчас выполняет переменная s. Ввиду однородности уравнения (1.17) можно во всех матрицах для простоты опустить строку и столбец, отвечающие y_0 (в однородном случае эти строка и столбец состоят из одних нулей), и иметь дело, как обычно, с матрицами, порядок которых равен порядку уравнения.

В нашем случае находим последовательно ($s \downarrow 0$):

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\int\limits_0^s \frac{1}{\tau^4} q\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o(1) & 1 \end{pmatrix},$$

$$C(s) = U^{-1}(s)BU(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o(1) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o(1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1) & 1 \\ o(1) & o(1) \end{pmatrix},$$

$$\int\limits_0^s C(\tau)\, d\tau = \begin{pmatrix} o(s) & s \\ o(s) & o(s) \end{pmatrix}, \quad C(s)\int\limits_0^s C(\tau)\, d\tau = o(s),$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1+o(s) & s+o(s^2) \\ o(s) & 1+o(s) \end{pmatrix}, \; Y(s) = U(s)W(s) = \begin{pmatrix} 1+o(s) & s+o(s^2) \\ o(s) & 1+o(s) \end{pmatrix}.$$

Итак, соотношения (1.22) для y_2 уточняются следующим образом:

$$y_2(s) = s + o(s^2), \quad \frac{dy_2}{ds} = 1 + o(s) \quad (s \downarrow 0).$$

Возвращаясь от s, y_2 к t, x_2 получаем требуемые соотношения.

Из доказательства ясно, что результат аналогичного характера может быть тем же способом получен для уравнения любого порядка и общего вида (в матричном или абстрактном случае — без члена с $x^{(n-1)}$). Так как это связано с довольно громоздкими выкладками, то мы здесь не будем этим заниматься.

§ 2. Непрерывная зависимость решений от параметра

2.1. Настоящий параграф посвящен вопросу о непрерывной зависимости от параметра решений линейной системы уравнений. Вопросы предельного перехода исследовали многие авторы, в том числе И. И. Гихман [3], Г. П. Демидович [4], М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [5], Я. Курцвейль [6, 7], Я. Курцвейль и З. Ворел [8], В. Рейд [9], Р. В. Гамкрелидзе и Г. Л. Харатишвили [10]. Большинство этих работ связано с обоснованием принципа усреднения Боголюбова—Крылова (см., например, [11]) в нелинейной механике и характеризуется общей точкой зрения на линейный и нелинейный случай.

Ниже получаются только линейные уравнения, причем основной упор будет сделан на случай конечного промежутка, Вопрос, подлежащий изучению, состоит в следующем. Рассмотрим уравнения

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k + F_k(t),\ X_k(a) = C,\ k = 0, 1, \ldots\ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{2.1}$$

Здесь X_k, A_k, F_k, C — матрицы m-го порядка, причем $A_k(t)$, $F_k(t)$ суммируемы на конечном промежутке $[a, b]$ (возможны и менее ограничительные предположения, которые будут обсуждаться позднее). Каковы условия, обеспечивающие равномерную на $[a, b]$ сходимость $X_k(t)$ к $X_0(t)$ при любой C?

Данный вопрос о «равномерной сходимости» уравнений (2.1) является весьма естественным. К нему можно подойти и несколько иначе, если в дифференциальных уравнениях (2.1) считать X_k, F_k, C не матрицами, а векторами размерности m. В таком случае вектор-решения $X_k(t)$ равномерно на $[a, b]$ сходятся к $X_0(t)$ при любом начальном векторе C?

Легко видеть, что оба вопроса эквивалентны. Мы в дальнейшем придерживаемся матричной интерпретации, которая значительно более удобна с аналитической точки зрения.

Ответим сразу, что эффективный ответ на сформулированный вопрос в полном объеме нам неизвестен. Ниже будет установлен ряд фактов в этом направлении, которые, в частности, позволят полностью решить данный вопрос для систем, соответствующих скалярным уравнениям n-го порядка.

Характер параметризации семейства уравнений, разумеется, не имеет значения. Можно было бы, например (как это обычно делается), считать параметр непрерывным и устремлять его к нулю. Дискретный вариант, как нам кажется, яснее подчеркивает отсутствие априорных предположений о непрерывности $A_k(t)$, $F_k(t)$ по параметру k.

Некоторые из излагаемых ниже результатов приводились в краткой и менее общей форме в [12, 13].

2.2. Ниже используются следующие обозначения:

$\|\cdot\|$ — некоторая «операторная» норма для матриц, т.е. такая, что $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\|I\| = 1$;

$L[a, b]$ — пространство суммируемых на $[a, b]$ матриц-функций (порядок которых в каждом случае будет ясен из контекста; иногда будет идти речь о скалярных функциях) с естественной нормой;

$$C^V(t) = \int\limits_a^t C(s)\,ds;$$

V_a^b — вариация на $[a,b]$;

Знак “$\Rightarrow$” означает сходимость, равномерную на $[a,b]$.

Итак, нас интересуют условия, при которых для решений уравнений (2.1) имеет место соотношение

$$X_k(t) \Rightarrow X_0(t)\ (k \to \infty) \quad \text{при любом } C. \tag{2.2}$$

Простейшее условие такого рода доставляет сходимость в $L[a,b]$:

$$\int\limits_a^b \|A_k(t) - A_0(t)\|\,dt \to 0, \quad \int\limits_a^b \|F_k(t) - F_0(t)\|\,dt \to 0, \quad (k \to \infty)$$

во многих отношениях, однако, оно является слишком грубым. Результаты работ [5, 8] дают для интересующего нас линейного случая требование, которое часто оказывается менее ограничительным:

$$A_k^V(t) \Rightarrow A_0^V(t)\ F_k^V(t) \Rightarrow F_0^V(t) \quad (k \to \infty) \tag{2.3}$$

$$\|A_k(t)\| \leqslant h(t) \in L[a,b] \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Усовершенствование доказательств позволяет ослабить последнее неравенство до

$$\int\limits_a^b \|A_k(t)\|\,dt \leqslant C < \infty \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Как будет видно из дальнейшего, при выполнении (2.4) соотношения (2.3) не только достаточны, но и необходимы для (2.2), так что в случае (2.4) вопрос можно считать исчерпанным. По этому поводу коснемся работы [9], где также изучаются условия, при которых имеет место (2.2) (для классических и обобщенных дифференциальных уравнений). Основным среди требований, накладываемых в [9] для классического случая, является слабая сходимость в $L[a,b]$ $A_k(t)$ к $A_0(t)$ и $F_k(t)$ к $F_0(t)$. Поскольку это требование влечет за собой выполнение (2.3) и (2.4), вместе взятых, то данные результаты В. Рейда не представляются существенно новыми. На эту оценку не влияет то обстоятельство, что вместо условий $X_k(a) = C$ в [9] фигурируют условия $X_k(a_k) = c_k$, где $a_k \to a_0$, $c_k \to c_0$ $(k \to \infty)$. Мы в дальнейшем пренебрегаем возможностью подобных обобщений, носящих по существу фиктивный характер.

Если отказаться от ограничения (2.4), проблема существенно усложняется. Хотя в некоторых случаях — например, для однородного уравнения первого порядка — соотношение (2.4) заведомо излишне, в целом это не так, поскольку условие (2.3) само по себе ни необходимо, ни достаточно для (2.2).

Чтобы пояснить последнее замечание, воспользуемся примером, заимствованным из работы Я. Курцвейля [6]. Рассмотрим на промежутке $[a, b]$ последовательность скалярных уравнений

$$\dot{x}_k = p_k(t)x_k + f_k(t), \text{ где } p_k(t) = k^{1-\alpha}\cos kt,\ f_k(t) = k^{1-\beta}\sin kt \tag{2.5}$$

$(k = 1, 2, \dots)$, которую будем сравнивать с уравнением $\dot{x} = 0$. Пусть $x_k(t, c_0)$ — решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условию $x_k(a) = c_0$. Как показывает непосредственный подсчет, соотношение

$$x_k(t, c_0) \rightrightarrows c_0 \quad (k \to \infty) \quad \text{при любом } c_0 \tag{2.6}$$

имеет место в том и только том случае, если

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta > 1. \tag{2.7}$$

Для данного конкретного примера требование сходимости в $L[a, b]$ коэффициентов и правых частей сводится к неравенствам $\alpha > 1$, $\beta > 1$, а условие (2.3) — к неравенствам $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Отсюда видно, что соотношения (2.3) не являются достаточными для сходимости решений. В то же время они не являются и необходимыми. Чтобы удостовериться в этом, положим $\alpha = \beta = 0{,}5$. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$x_k(t, c) = c - 0{,}5(t - a) + o(k^{-0{,}5}) \quad (k \to \infty),$$

т.е. при любом c $x_k(t, c)$ равномерно сходятся к соответствующему решению уравнения $\dot{x} = -0.5$, хотя соотношение $f_k^V(t) \rightrightarrows -0{,}5t$ не имеет места.

Пример (2.5), согласно Я. Курцвейлю, послужил отправной точкой для работ [6, 7], результаты которых, в частности, дают — с общих позиций, разумеется, — достаточное для (2.6) условие в виде $\alpha > 0{,}5$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$. Как отмечалось в [6], пример, таким образом, объяснен не полностью, ввиду требования $\alpha > 0{,}5$ вместо $\alpha > 0$ (заметим также, что вопрос о необходимости тех или иных условий в [6] не затрагивается). Мы не останавливаемся здесь на работах [6, 7] подробнее. Они имеют довольно мало общего с дальнейшими рассмотрениями данного параграфа. Мы пользуемся в дальнейшем специфически линейными средствами, что позволит нам получить для линейного случая более тонкие результаты (в частности будет полностью объяснен — хотя и с менее общих «линейных» позиций приведенный выше пример Я. Курцвейля).

2.3. Переходим к существу дела. Прежде всего, как и в § 1, избавимся от неоднородности за счет повышения размерности. Именно, вместо уравнений (2.1) рассмотрим уравнения для матриц порядка $2m$

$$\dot{U}_k = B_k(t)U_k, \quad U_k(a) = I_{2m}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{2.8}$$

Здесь через I_{2m} обозначена (во избежание путаницы) единичная матрица порядка $2m$, а B_k имеют в блочной записи вид

$$B_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & F_k(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Для того, чтобы при любом C решения уравнений* (2.1) *удовлетворяли условию* (2.2)*, необходимо и достаточно, чтобы для решений уравнений* (2.8) *имело место соотношение*

$$U_k(t) \rightrightarrows U_0(t) \quad (k \to \infty).$$

Это непосредственно вытекает из формул, связывающих решения уравнений (2.1) и (2.8). Пусть решение задачи (2.8) имеет вид

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} U_k^{11}(t) & U_k^{12}(t) \\ U_k^{21}(t) & U_k^{22}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

где все блоки порядка m. Из (2.9) вытекает, что $U_k^{21}(t) \equiv 0$, $U_k^{22}(t) \equiv I$. Легко видеть, что решение (2.1) имеет вид

$$X_k(t) = U_k^{11}(t)C + U_k^{12}(t) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Наоборот, решение задачи (2.8) выражается через решение $X_k(t) = X_k(t, C)$ уравнения (2.1) формулой

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} X_k(t, I) - X_k(t, 0) & X_k(t, 0) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Если уравнения (2.1) являются векторными, то нет надобности повышать порядок до $2m$, можно, очевидно, ввести вопрос к однородной задаче для матриц порядка $m + 1$.

Итак, без потери общности вместо (2.1) можно изучать однородные задачи

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k, \ X_k(a) = I, \quad k = 0, 1, \dots \ (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.10}$$

которые и будут в дальнейшем основным объектом исследования. Нас интересуют условия, при которых

$$X_k(t) \rightrightarrows X_0(t) \quad (k \to \infty). \tag{2.11}$$

2.4. Рассмотрим наряду с (2.10) уравнения

$$\dot{U}_k = [A_k(t) + B_k(t)]U_k,\ U_k(a) = I, \quad k = 0, 1, \dots\ (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.12}$$

На последовательность $\{B_k(t)\}$ наложим следующие ограничения:

$$\int\limits_a^b \|B_k(t)\|\, dt \leqslant c < \infty \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{2.13}$$

$$B_k^V(t) \rightrightarrows B_0^V(t) \quad k \to \infty. \tag{2.14}$$

Теорема 2.1. *В предположениях* (2.13), (2.14) *соотношение*

$$U_k(t) \rightrightarrows U_0(t) \quad (k \to \infty). \tag{2.15}$$

эквивалентно соотношению (2.11).

Для доказательства нам понадобится несколько простых вспомогательных фактов.

Лемма 2.2. *Если* $F(t)$ *абсолютно непрерывна на* $[a,b]$ *и*

$$\|\dot{F}(t)\| \leqslant c(t)\|F(t)\|$$

почти всюду на $[a,b]$, *то*

$$\|F(t) - F(a)\| \leqslant \|F(a)\|\Big(\exp\int\limits_a^t c(s)\, ds - 1\Big) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

В самом деле,

$$\|F(t)\| \leqslant w(t) \overset{Df}{=} \|F(a)\| + \|F(t) - F(a)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F(a)\| + \int\limits_a^t c(s)\|F(s)\|\, ds \leqslant \|F(a)\| + \int\limits_a^t c(s) w(s)\, ds.$$

Оценивая $w(t)$ по Гронуоллу—Беллману, находим

$$w(t) \leqslant \|F(a)\| \exp\int\limits_a^t c(s)\, ds,$$

что эквивалентно требуемому неравенству. Лемма доказана.

Ниже через Ψ обозначается класс последовательностей $\{F_k(t)\}$ матриц-функций на $[a,b]$, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_a^b \|F_k(t)\|\,dt \leqslant \mathrm{const} < \infty \ (k=1,2,\dots), \quad F_k^V(t) \rightrightarrows 0 \ (k\to\infty). \tag{2.16}$$

В частности, Ψ содержит все последовательности, сходящиеся к нулю в $L[a,b]$.

Лемма 2.3. *Если* $\{A_k(t)\} \in \Psi$*, то решения* (2.10) *удовлетворяют условию* $X_k(t) \rightrightarrows I \ (k \to \infty)$.

Действительно, полагая $X_k = (I + A_k^V)Y_k$, находим

$$\dot{Y}_k = (I + A_k^V)^{-1} A_k A_k^V Y_k, \quad Y_k(a) = I.$$

Теперь достаточно оценить $Y_k(t)$ по лемме 2.2, чтобы убедиться в равномерной сходимости Y_k (а следовательно, и X_k) к I.

Лемма 2.4. *Пусть* $\{F_k(t)\} \in \Psi$ *и последовательность* $\{H_k(t)\}$ *удовлетворяет условию*

$$H_k(t) \rightrightarrows H(t) \ (k\to\infty), \quad V_a^b H(t) < \infty.$$

Тогда

$$\{F_k(t)H_k(t)\} \in \Psi, \quad \{H_k(t)F_k(t)\} \in \Psi.$$

Так как $H_k = (H_k - H) + H$ и многообразие Ψ линейно, то достаточно показать, что класс Ψ инвариантен относительно почленного умножения (справа и слева) на $\{G_k(t)\}$ в любом из следующих случаев: 1) $G_k(t) \rightrightarrows 0$; 2) $G_k(t)$ равномерно ограничены вместе со своими вариациями на $[a,b]$ (фактически нам понадобится 2) лишь для совпадающих G_k). Случай 1) совершенно очевиден: здесь соответствующие последовательности даже сходятся к нулю в $L[a,b]$. Проверка 2) сводится к интегрированию по частям, например, для $\{F_k H_k\}$ имеем

$$\Big\| \int\limits_a^t F_k(s)G_k(s)\,ds \Big\| = \Big\| F_k^V(t)G_k(t) - \int\limits_a^t F_k^V(s)\,dG_k(s) \Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \|F_k^V(t)\| \left[\max_{a\leqslant t\leqslant b} \|G_k(t)\| + V_a^b G_k \right],$$

откуда и вытекает требуемое.

Переходим к теореме 2.1. Поскольку уравнения (2.10) и (2.12) входят в формулировку равноправно с точностью до переобозначений, то достаточно проверить импликацию (2.11)→(2.15). Пусть (2.11) выполнено. Покажем, что тогда имеет место соотношение

$$W_k(t) \stackrel{Df}{=} U_0^{-1}(t)X_0(t)X_k^{-1}(t)U_k(t) \Rightarrow I \quad (k \to \infty), \tag{2.17}$$

очевидно, эквивалентное (2.15).

Непосредственный подсчет показывает, что $W_k(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{W}_k = c_k(t)W_k, \quad W_k(a) = I, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$c_k = U_0^{-1}X_0\left(X_k^{-1}B_kX_k - X_0^{-1}B_0X_0\right)X_0^{-1}U_0.$$

Согласно лемме 2.3 соотношение (2.17) будет доказано, если мы убедимся, что

$$\{c_k\} \in \Psi. \tag{2.18}$$

Из уравнений, которым удовлетворяют $X_0(t)$, $X_0^{-1}(t)$, $U_0(t)$, $U_0^{-1}(t)$, явствует, что эти матрицы-функции имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$. Поэтому в силу леммы 2.4 вместо (2.18) достаточно проверить, что

$$\{X_k^{-1}B_kX_k - X_0^{-1}B_0X_0\} \in \Psi. \tag{2.19}$$

По условию теоремы $\{B_k - B_0\} \in \Psi$, откуда, согласно (2.11) и лемме 2.4

$$\{X_k^{-1}(B_k - B_0)X_k\} \in \Psi. \tag{2.20}$$

В то же время

$$\{X_k^{-1}B_0X_k - X_0^{-1}B_0X_0\} \in \Psi, \tag{2.21}$$

так как стоящая в левой части последовательность сходится к нулю в $L[a, b]$. Складывая (2.20) и (2.21) получаем (2.19). Теорема доказана.

В частности, полагая $B_k(t) = -A_0(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$, получаем простое, но важное для дальнейшего

Следствие 2.1. *Соотношение* (2.11) *имеет место в том и только том случае, если* $Y_k(t) \Rightarrow I$ $(k \to \infty)$, *где*

$$\dot{Y}_k = [A_k(t) - A_0(t)]Y_k, \quad Y_k(a) = I, \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.22}$$

2.5. Во многих случаях системы (2.22) оказываются более удобными для исследования, чем (2.10), а иногда допускают и непосредственное интегрирование. Именно так, в частности, обстоит дело с системами, соответствующими скалярным уравнениям n-го порядка.

В самом деле, пусть даны уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.23}$$

$$x_k^{(n)} + p_{1,k}(t)x_k^{(n-1)} + \dots + p_{n,k}(t)x_k + p_{n+1,k}(t) = 0$$
$$(a \leqslant t \leqslant b), \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.24}$$

с суммируемыми на $[a, b]$ коэффициентами и рассматривается вопрос о сходимости в $C^{n-1}[a, b]$ решений (2.24) к решениям (2.23). Перепишем по знакомой схеме (см. § 1) (2.23), (2.24) в виде однородных матричных уравнений

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.25}$$

где все матрицы имеют порядок $n + 1$, причем

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_{n+1}(t) & -p_n(t) & \dots & -p_1(t) \end{pmatrix},$$

$A_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ имеют аналогичный вид с заменой p_i на $p_{i,k}$. Согласно лемме 2.1, сходимость в $C^{n-1}[a, b]$ решений (2.24) к соответствующему решению (2.23) (при любых согласованных начальных условиях) эквивалентна соотношению (2.11), где X_k — решения (2.25) такие, что $X_k(a) = I$. Поскольку $A_k(t)$ суммируемы на $[a, b]$ — здесь, кстати, мы первый раз существенно используем конечность $[a, b]$ — то применимо следствие 2.1. Итак, вопрос свелся к интегрированию системы (2.22), где у матрицы $A_k - A_0$ элементы всех строк, кроме последней, равны нулю. Мы уже сталкивались с подобной системой в § 1: все строки матриц $Y_k(t) = \|y_{ij}^k(t)\|$, кроме последней, совпадают с соответствующими строками единичной матрицы, а элементы последней строки даются формулами, аналогичными (1.15) и (1.16), с заменой p_i на $p_{i,k} - p_i$. В частности,

$$y_{n+1,n+1}^k(t) = \exp \int_a^t [p_1(\tau) - p_{1,k}(\tau)]\, d\tau,$$

так что требование $y_{n+1,n+1}^k \rightrightarrows 1$ эквивалентно соотношению $p_{1,k}^V \rightrightarrows p_1^V$. Переходя к другим функциям $y_{n+1,i}^k$, получаем в итоге следующий критерий.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы при $k \to \infty$ решения уравнений* (2.24) *с любыми фиксированными начальными условиями сходились в* $C^{n-1}[a, b]$

к соответствующему решению уравнения (2.23), *необходимо и достаточно, чтобы при* $k \to \infty$

$$\int_a^t [p_{1,k}(\tau) - p_1(\tau)]\, d\tau \rightrightarrows 0, \tag{2.26}$$

$$\int_a^t [p_{i,k}(s) - p_i(s)] \exp\Big(\int_a^s [p_{1,k}(\tau) - p_1(\tau)]\, d\tau \Big)\, ds \rightrightarrows 0,$$
$$i = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{2.27}$$

Тем самым для уравнений n-го порядка вопрос, поставленный в начале параграфа, полностью решен.

Подчеркнем, что (2.26), (2.27) не могут быть заменены условием

$$\int_a^t [p_{i,k}(s) - p_i(s)]\, ds \rightrightarrows 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1 \ (k \to \infty),$$

которое, как показывают примеры, ни при каком $n > 1$ не обеспечивает сходимости решений даже в $C[a, b]$.

Доказанный результат допускает различные модификации. Как и в теореме 1.1, можно считать, что t пробегает в комплексной плоскости некоторую спрямляемую кривую или ограниченную односвязную область, внутри которой все $p_i(t)$ и $p_{i,k}(t)$ аналитичны; если возмущение коэффициента p_1 отсутствует, можно считать x элементом банаховой алгебры. В другом направлении можно ослабить требования за счет самой теоремы 1.1. Именно, если допустить у p_i, $p_{i,k}$ наличие в концах отрезка $[a, b]$ или даже в конечном числе точек этого отрезка несуммируемых особенностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1, то решения матричных уравнений (2.25) будут по-прежнему определены и непрерывны в $[a, b]$, вместе с обратными матрицами $X_k^{-1}(t)$; можно показать (на чем подробнее не останавливаемся), что для применения следствия 2.1 ничего большего и не требуется.

С другой стороны, теорему 1.1 можно было бы получить с помощью теоремы 2.2, применив последнюю к уравнениям с коэффициентами

$$p_{i,k}(t) = \begin{cases} p_i(t), & k^{-1} \leqslant t \leqslant b \\ 0, & a \leqslant t \leqslant k^{-1} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

(использованный в § 1 способ является, конечно, более прямым и простым). Все это свидетельствует о тесной связи между теоремами 1.1 и 2.2, на что указывает также некоторое сходство формулировок и общие моменты в доказательствах. Чтобы полностью выявить эту связь, следует встать на точку зрения обобщенных дифференциальных уравнений.

Возвращаемся к матричным уравнениям (2.10). Напрашивается мысль ввести специальную «сходимость» коэффициентов матриц, положив, по определению, $A_k(t) \rightsquigarrow A_0(t)$ $(k \to \infty)$, если выполнено (2.11). Теорема 2.1 показывает, что при выполнении (2.13), (2.14) не только $B_k \rightsquigarrow B_0$, но, более того, соотношение $A_k \rightsquigarrow A_0$ влечет за собой $A_k + B_k \rightsquigarrow A_0 + B_0$ для любой последовательности $\{A_k\}$ (в частности, к обеим частям соотношения $A_k \rightsquigarrow A_0$ можно добавить суммируемую B_0). Все же эту идею нельзя считать удачной, поскольку подобная «сходимость» не обеспечивает в целом непрерывности линейных операций. Чтобы убедиться в этом, прибегнем снова к примеру (2.5) при $\alpha = \beta = 0,5$, переписав его в однородной матричной форме. Именно, легко проверить, что при $k \to \infty$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k}\cos kt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

хотя, как уже отмечалось,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k}\cos kt & \sqrt{k}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6. Оставим абстрактные соображения, которые здесь, видимо, малополезны, и перейдем к более конкретным вопросам. Положим

$$R_k(t) = A_k(t) - A_0(t), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и исследуем различные дополнительные условия, которые обеспечивают эквивалентность (2.11) и соотношения

$$R_k^V(t) \rightrightarrows 0 \quad (k \to \infty). \tag{2.28}$$

Теорема 2.3. *Пусть выполняется по крайней мере одно из соотношений*

1) $\displaystyle\int_a^b \|R_k(t)\|\,dt \leqslant c < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots);$

2) $\displaystyle\int_a^b \|R_k(t)R_k^V(t)\|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty);$

3) $\displaystyle\int_a^b \|R_k^V(t)R_k(t)\|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty);$

4) $\displaystyle\int_a^b \|R_k(t)R_k^V(t) - R_k^V(t)R_k(t)\|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty).$

Тогда условие (2.28) *необходимо и достаточно для* (2.11).

В части, относящейся к достаточности, условие 1) более ограничительно, чем каждое из трех других, и поэтому не представляет интереса; в остальном 1)—4) попарно независимы. Каждое из условий 2)—4) выполняется, в частности, для систем, соответствующих матричным уравнениям n-го порядка (2.23), (2.24), если возмущение коэффициента при $x^{(n-1)}$ отсутствует (т.е. $p_{1,k} \equiv p_1$, $k = 1, 2, \dots$); действительно, в этом случае, $R_k R_k^V \equiv R_k^V R_k \equiv 0$ при всех k. Тем самым, ещё раз подтверждается справедливость теоремы 2.2 для подобных уравнений.

Другим простым следствием теоремы 2.3 является упоминавшаяся выше эквивалентность соотношений (2.2) и (2.3) в случае (2.4); для проверки достаточно переписать уравнения (2.1) в однородной форме, согласно (2.8), (2.9) и сослаться на 2).

Не исключено, что 1)—4) являются частными случаями какого-то общего и достаточно просто формулируемого соотношения. Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Переходим к доказательству. Согласно следствию 2.1 вместо (2.10) можно рассматривать уравнения

$$\dot{Y}_k = R_k(t)Y_k,\ Y_k(a) = I, \quad k = 1, 2, \dots\ (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.29}$$

причем роль (2.11) переходит к соотношению

$$Y_k(t) \rightrightarrows I \quad (k \to \infty). \tag{2.30}$$

Начнем со случая 1). Здесь должна быть установлена лишь необходимость (2.28). С помощью умножения слева на Y^{-1} и дифференцирования легко проверить соотношение (индекс k для простоты записи будем опускать)

$$R^V(t) = Y(t) - I - Y(t)\int_a^t Y^{-1}(s)R(s)R^V(s)\,ds. \tag{2.31}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и k столь велико, что для $Y(t) = Y_k(t)$ выполнены неравенства

$$\|Y(t) - I\| \leqslant \varepsilon, \quad \|Y^{-1}(t) - I\| \leqslant \varepsilon, \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Тогда в силу (2.31)

$$\|R^V(t)\| \leqslant \varepsilon + (1+\varepsilon)^2 \int\limits_a^t \|R(s)\|\|R^V(s)\|\, ds,$$

откуда, оценивая $\|R^V(t)\|$ по Гронуоллу—Беллману с учетом 1), получаем

$$\|R^V(t)\| \leqslant \varepsilon e^{c(1+\varepsilon)^2} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Требуемое соотношение $\{1)+(2.30)\} \to (2.28)$ доказано. Импликация $\{2)+(2.30)\} \to (2.28)$ вытекает из (2.31) очевидным образом. Что касается импликации $\{3)+(2.30)\} \to (2.28)$, то для нее вместо (2.31) достаточно принять несколько иное соотношение,

$$R^V(t) = I - Y^{-1}(t) + \Big(\int\limits_a^t R(s)R^V(s)Y(s)\, ds\Big)Y^{-1}(t).$$

которое получается из (2.29) интегрированием по частям.

В части, относящейся к необходимости, случаи 1)—3), таким образом, рассмотрены. Чтобы установить достаточность (2.28) для (2.30) в условиях 2) или 3) произведем соответственно замены (первая из них аналогична той, которая применялась при доказательстве леммы 2.3)

$$U(t) = \big[I + R^V(t)\big]^{-1} Y(t), \quad W(t) = \big[I - R^V(t)\big]^{-1} Y(t)$$

нетрудно проверить, что U и W удовлетворяют уравнениям

$$\dot U = (I + R^V)^{-1} R R^V U, \quad U(a) = I,$$

$$\dot W = -R R^V (I - R^V)^{-1} W, \quad W(a) = I.$$

Теперь достаточно оценить $U(t)$ и $W(t)$ по лемме 2.2, чтобы получить требуемые соотношения $\{2)+(2.28)\} \to (2.30)$, $\{3)+(2.28)\} \to (2.30)$

Случаи 1)—3) рассмотрены. Переходим к случаю 4), который, безусловно, наиболее интересен. Здесь нам понадобится следующая оценка.

2.7.

Лемма 2.5. *В любой точке дифференцируемости матрицы-функции $F(t)$ справедливы неравенства*

$$\left.\begin{array}{l} \left\|\dfrac{d}{dt}e^{F(t)} - \dot F(t)e^{F(t)}\right\| \\ \left\|\dfrac{d}{dt}e^{F(t)} - e^{F(t)}\dot F(t)\right\| \end{array}\right\} \leqslant \frac{1}{2}e^{\|F(t)\|}\|\dot F(t)F(t) - F(t)\dot F(t)\|. \tag{2.32}$$

Ограничимся доказательством верхнего из неравенств (2.32), поскольку нижнее доказывается аналогично. Введем обозначения

$$K(t) = \dot F(t)F(t) - F(t)\dot F(t),$$

$$c_{m,n}(t) = F^{m-1}(t)\dot F(t)F^{n-m}(t) \quad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

Имеем:

$$\|c_{r+1,n} - c_{r,n}\| = \|F^{r-1}(\dot F F - F\dot F)F^{n-r-1}\| = \\ = \|F^{r-1}KF^{n-r-1}\| \leqslant \|K\|\|F\|^{n-2} \quad (1 \leqslant r < n),$$

откуда

$$\|c_{m,n} - c_{1,n}\| \leqslant \|c_{m,n} - c_{m-1,n}\| + \|c_{m-1,n} - c_{m-2,n} - c_{m-3,n}\| + \cdots + \\ + \|c_{2,n} - c_{1,n}\| \leqslant (m-1)\|K\|\|F\|^{n-2} \quad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

В силу последнего неравенства

$$\left\|\frac{d}{dt}F^n - n\dot F F^{n-1}\right\| = \left\|\sum_{m=1}^{n} c_{m,n} - nc_{1,n}\right\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{m=2}^{n}\|c_{m,n} - c_{1,n}\| \leqslant \frac{1}{2}n(n-1)\|K\|\|F\|^{n-2}.$$

Наконец, находим

$$\left\|\frac{d}{dt}e^F - \dot F e^F\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\|\frac{d}{dt}F^n - n\dot F F^{n-1}\right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\|K\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}\|F\|^{n-2} = \frac{1}{2}\|K\|e^{\|F\|}.$$

Лемма доказана. Тот же прием «переброски» позволяет, очевидно, оценивать (в круге сходимости степенного ряда)

$$\left\|\frac{d}{dt}\varphi(F) - \dot F\varphi'_F\right\|, \quad \left\|\frac{d}{dt}\varphi(F) - \varphi'_F\dot F\right\|$$

через $\|K(t)\|$, $\|F(t)\|$ для любой аналитической $\varphi(F)$.

Покажем теперь, что в случае 4) теоремы 2.3 (2.28) влечет за собой (2.30). Дифференцируя матрицу $Z(t) = Y^{-1}(t)\exp R^V(t)$ (индекс k по-прежнему опускается), находим

$$\dot Z = Ze^{-R^V}\left(\frac{d}{dt}e^{R^V} - Re^{R^V}\right), \tag{2.33}$$

откуда, согласно лемме 2.5

$$\|\dot{Z}\| \leqslant \frac{1}{2}\|e^{-R^V}\|e^{\|R^V\|}\|RR^V - R^V R\|\|Z\|.$$

Так как $Z(a) = I$, мы можем теперь оценить $Z(t)$ по лемме 2.2. Эта оценка показывает, что в случае 4) $Z = Z_k \Rightarrow I$; то же самое, следовательно, относится и к $Y = Y_k$.

Для завершения доказательства теоремы осталось установить соотношение $\{4) + (2.30)\} \to (2.28)$. Пусть 4) и (2.30) выполнены и пусть k столь велико, что величина $\varepsilon = \varepsilon_k$, определенная формулой

$$\varepsilon = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|Y(t) - I\| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|Y(t)\|\int\limits_a^b \|Y^{-1}(s)\|\|R(s)R^V(s) - R^V(s)R(s)\|\,ds,$$

удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < \frac{1}{2}; \tag{2.34}$$

покажем, что тогда

$$\|R^V(t)\| \leqslant -\ln(1-\varepsilon) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.35}$$

откуда непосредственно вытекает требуемое утверждение. Предположим противное: пусть (2.35) не имеет места. Тогда в силу (2.34), непрерывности $\|R^V(t)\|$ по t и равенства $\|R^V(a)\| = 0$ найдется t_0 из интервала (a, b) такое, что

$$\|R^V(t_0)\| > -\ln(1-\varepsilon), \tag{2.36}$$

$$\|R^V(t)\| \leqslant \ln 2 \quad (a \leqslant t \leqslant t_0). \tag{2.37}$$

Интегрируя (2.33), находим

$$e^{R^V(t)} - I = Y(t) - I + Y(t)\int\limits_a^t Y^{-1}(s)\Big[\frac{d}{ds}e^{R^V(s)} - R(s)e^{R^V(s)}\Big]\,ds,$$

откуда, согласно лемме 2.5 и неравенству (2.37),

$$\begin{gathered}\|e^{R^V(t)} - I\| \leqslant \|Y(t) - I\| + \\ + \frac{1}{2}\|Y(t)\|\int\limits_a^t e^{\|R^V\|}\|Y^{-1}\|\|RR^V - R^V R\|\,ds \leqslant \varepsilon \quad (a \leqslant t \leqslant t_0).\end{gathered} \tag{2.38}$$

Из (2.37) ясно, что при $t \in [a, t_0]$ $R^V(t)$ есть главное значение логарифма $\exp R^V(t)$. Поэтому на основании (2.34), (2.38) находим

$$\|R^V(t)\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(I - e^{R^V(t)}\Big)^n \Big\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big\| e^{R^V(t)} - I \Big\|^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} = -\ln(1-\varepsilon) \quad (a \leqslant t \leqslant t_0).$$

Полученное противоречие с (2.38) завершает доказательство теоремы 2.3.

2.8. Помимо знакомых уже вариантов обобщений добавим, что в теореме 2.3 конечность промежутка $[a, b]$ фактически не использовалась; при бесконечном промежутке теряет силу лишь сделанное выше замечание о применимости теоремы 2.2 к матричным уравнениям n-го порядка. Попутно заметим, что конечность промежутка не использовалась и при доказательстве теоремы 2.1, тогда как теорема 2.2 на бесконечные промежутки не распространяется. Последнее обстоятельство иллюстрируется примером:

$$\ddot{x}_k + \frac{1}{kt^2} x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (1 \leqslant t < \infty).$$

Вернемся к примеру Я. Курцвейля (2.5). Ясно, что теорема 2.2, охватывающая скалярные уравнения любого порядка, полностью «объясняет» этот пример. В то же время теорема 2.3 позволяет объяснить основную импликацию (2.7) $\to$ (2.6) и с более общей матричной точки зрения. Действительно, переходя к однородной матричной записи, получаем коэффициентные матрицы $R_k(t)$ вида

$$R_k(t) = \begin{pmatrix} k^{1-\alpha} \cos kt & k^{1-\beta} \sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; R_k^V(t) = \begin{pmatrix} k^{-\alpha} \sin kt & k^{-\beta}(1 - \cos kt) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Случаи 1)—3) теоремы 2.3 здесь оказываются недостаточными, так как помимо (2.7) требуют дополнительных ограничений; однако, 4) ведет к цели, поскольку

$$R_k(t) R_k^V(t) - R_k^V(t) R_k(t) = \begin{pmatrix} 0 & k^{1-\alpha-\beta}(\cos kt - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.9. Некоторые из установленных выше фактов находят приложения в смежных вопросах. Остановимся на одном таком приложении леммы 2.5.

Общеизвестно, что матричное уравнение

$$\dot{X} = A(t) X \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty) \tag{2.39}$$

с локально суммируемой внутри $[a, b)$ матрицей $A(t)$ имеет решение вида

$$X_0(t) = I + o(1) \quad (t \uparrow b), \tag{2.40}$$

если $A(t)$ абсолютно суммируема на $[a, b)$. А. Винтнер [14] заметил, что последнее ограничение можно ослабить следующим образом (мы приводим результат Винтнера в обобщенной формулировке, т.к. в [14] рассматривался лишь случай $b = \infty$).

Теорема 2.4 (А. Винтнер [14]). *Пусть $A(t)$ интегрируема на $[a, b)$ (вообще говоря, неабсолютно), т.е. существует*

$$A^0(t) = \int_t^b A(s)\, ds. \tag{2.41}$$

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\int^b \|A^0(t)A(t)\|\, dt < \infty, \quad \int^b \|A(t)A^0(t)\|\, dt < \infty,$$

то уравнение (2.39) *обладает решением вида* (2.40).

Из леммы 2.5 вытекает дополняющее этот результат

Следствие 2.2. *Если первообразная* (2.41) *существует и удовлетворяет условию*

$$\int^b \|A^0(t)A(t) - A(t)A^0(t)\|\, dt < \infty,$$

то уравнение (2.39) *обладает решением вида* (2.40).

Для доказательства произведем замену

$$Y(t) = e^{A^0(t)} X(t).$$

Тогда (2.39) перейдет в уравнение

$$\dot{Y} = C(t)Y, \quad \text{где} \quad C = \Big(\frac{d}{dt} e^{A^0} + e^{A^0} A\Big) e^{-A^0}. \tag{2.42}$$

Так как $\dot{A}^0 = -A$, то по лемме 2.5

$$\|C(t)\| \leqslant \frac{1}{2} e^{2\|A^0(t)\|} \|A^0(t)A(t) - A(t)A^0(t)\| \quad (a \leqslant t < b).$$

Согласно предположению это влечет за собой суммируемость $C(t)$ на $[a,b)$. Таким образом, уравнение (2.42) обладает решением вида (2.40); следовательно, это верно и для уравнения (2.39), так как $A^0(t) = o(1)$ при $t \uparrow b$. Следствие доказано.

Наличие у (2.39) решения вида (2.40), очевидно, эквивалентно следующему утверждению: каждое нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (2.39) имеет при $t \uparrow b$ конечный ненулевой предел $X(b)$. Этот предел дается формулой $X(b) = X(a)X_0^{-1}(a)$.

Всюду выше уравнения вида $\dot{X} = AX$ можно было бы, разумеется, заменить уравнениями $\dot{X} = XB$, что соответствует переходу к сопряженным уравнениям.

Литература

1. *Hille, E.* Non-oscillation theorems / E. Hille // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1948. — Vol. 64, no. 2. — P. 234—258.
2. *Halanay, A.* Comportarea asimptoticǎ a soluţiilor ecuaţiilor de ordinul al doilea de tip neoscilator / A. Halanay // *Comunicǎrile Acad. Rep. pop. Romîne.* — 1959. — Vol. 9, no. 11. — P. 1121—1128.
3. *Гихман, И. И.* По поводу одной теоремы Н.Н. Боголюбова / И. И. Гихман // *Укр. мат. журн.* — 1952. — Т. 4, № 2. — С. 215—219.
4. *Демидович, Б. П.* О некоторых теоремах осреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений / Б. П. Демидович // *Матем. сб.* — 1954. — Т. 35(77), № 1. — С. 73—92.
5. *Красносельский, М. А.* О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // *УМН.* — 1955. — Т. 10, № 3. — С. 147—153.
6. *Kurzweil, J.* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1957. — Vol. 7 (82), no. 3. — P. 418—449.
7. *Kurzweil, J.* Addition to my paper “Generalized ordinary differential equations and continuos dependence on a parameters” / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1959. — Vol. 9(83), no. 4. — P. 564—573.
8. *Курцвейль, Я.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра / Я. Курцвейль, З. Ворел // *Чехосл. мат. журн.* — 1957. — Т. 7, № 4. — С. 568—583.
9. *Reid, W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // *J. Differ. Equations.* — 1967. — Vol. 3, no. 3. — P. 423—439.
10. *Гамкрелидзе, Р. В.* Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах / Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1969. — Т. 33, № 4. — С. 781—839.
11. *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных ко-

лебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М.: Физматгиз, 1955. — 447 с.
12. *Левин, А. Ю.* «Сходящиеся» системы линейных уравнений / А. Ю. Левин // Тезисы докладов Московского математического конгресса. — Секция 6. — 1966. — С. 32—33.
13. *Левин, А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774—777.
14. *Wintner, A.* On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations / A. Wintner // *Amer. J. Math.* — 1954. — Vol. 76. — P. 183—190.

9. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения[10]. II *

§ 3. Обобщенные уравнения

3.1. Рамки уравнения с суммируемыми коэффициентами часто оказываются стеснительными в некоторых отношениях, и возникает необходимость в более широких классах уравнений, которые именуются «обобщенными», «квазидифференциальными» и т. п. Здесь имеется несколько существенно различных подходов, в зависимости от желаемого характера обобщения. В настоящем параграфе рассматриваются некоторые возникающие в этой связи принципиальные моменты.

В основу того или иного построения обобщенных уравнений обычно кладется одна из следующих концепций.

1°. Дифференциальное уравнение заменяется интегральным, в котором интеграл трактуется в расширенном смысле. Собственно говоря, уже уравнения с суммируемыми коэффициентами получены из уравнений с непрерывными коэффициентами подобным приемом — заменой риманова интеграла лебеговым. Дальнейшее продвижение возможно в направлении интегралов Данжуа—Перрона либо Стильтьеса (либо в обоих направлениях сразу). К интегрированию по Данжуа—Перрону мы фактически уже подведены теоремой 1.1, где характеризуются несуммируемые особенности коэффициентов $p_i(t)$ в точке $t_0 = a$, не влияющие на определенность $x^{(i)}(t_0)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. В каком смысле должны пониматься интегралы, фигурирующие в (1.3), и те, что появляются при почленном однократном интегрировании по t равенства (1.1)? Если, как в теореме 1.1, t_0 есть концевая точка $[a, b]$, то можно, очевидно, их считать просто несобственными интегралами Лебега (почему данный вопрос и не обсуждался в 1.1). В то же время теорема 1.1 показывает, что подобные особенности коэффициентов допустимы и внутри основного промежутка $[a, b]$, так как продолжение решений через каждую такую точку $t = t_0$ не вызывает трудностей. В этом случае (особенно, если число таких точек внутри $[a, b]$ бесконечно) интегрирование по Лебегу уже не годится и должно быть заменено интегрированием по Данжуа—Перрону. Мы не углубляемся далее в этом направлении, уводящем от дифференциальных уравнений в теорию интегрирования функций вещественной переменной. Что касается обобщений стильтьесовского типа, с которыми мы пока не сталкивались и которые представляют больший интерес для приложений, то они в дальнейшем будут подробно обсуждаться.

[10] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. II // Вестник Ярославского университета. — Ярославль. — 1974. — Вып. 8. — С. 122—144.

*Настоящая работа является продолжением статьи [1]; впрочем, ее можно читать независимо.

2°. Обобщенное уравнение трактуется как последовательность классических уравнений, коэффициенты которых «неограниченно сближаются». В последний термин может вкладываться различный смысл, однако всегда важно, чтобы «сближение» коэффициентов обеспечивало сходимость решений (с фиксированными начальными условиями) — либо точечную, либо в некотором функциональном пространстве. Соответствующий предел и объявляется решением обобщенного уравнения.

Разумеется, обе концепции 1° и 2° часто соприкасаются. Вторая из них, более аналитическая по духу, вполне может применяться и самостоятельно. По отношению к 1° дело обстоит несколько иначе: конструкции, основанные на формальном переходе к интегральному уравнению (с тем или иным способом интегрирования) и не подкрепленные соображениями непрерывности, могут оказаться недостаточно оправданными, как будет видно из дальнейшего.

3.2. Сказанное выше относится как к линейным, так и нелинейным уравнениям. Здесь уместно упомянуть серию работ Я. Курцвейля [2–4], где развивалось одно из возможных обобщений обыкновенных (вообще говоря, нелинейных) уравнений. Формулировки результатов этих работ довольно громоздки, но заметно упрощаются в интересующем нас случае линейного уравнения, которое Я. Курцвейль записывает в виде

$$\dot{X} = d[A(t)X + B(t)] \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.1}$$

и трактует как интегральное уравнение

$$X(t) = X(a) + \int_a^t [dA(\tau)X(\tau) + dB(\tau)] \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

с интегрированием по Перрону, но в несколько обобщенном смысле. Для нас сейчас существенно, что основные ограничения, накладываемые при этом на $A(t)$, $B(t)$ имеют, приблизительно говоря, вид

$$\|A(t+h) - A(t)\| \leqslant c_1 h^{\alpha}, \quad \|B(t+h) - B(t)\| \leqslant c_2 h^{\beta}, \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.2}$$

где

$$\alpha > 0,5, \quad \alpha + \beta > 1. \tag{3.3}$$

В этих условиях Курцвейль устанавливает для (3.1) теоремы о существовании, единственности и предельном переходе (в части, относящейся к линейным уравнениям, работа [2] содержит ошибку, исправленную в [4]). Обобщенные уравнения, рассматриваемые Курцвейлем, несколько отклоняются от очерченной выше схемы, поскольку они не включают в себя класс уравнений с суммируемыми коэффициентами: очевидно, из абсолютной непрерывности $A(t)$, $B(t)$ не вытекают соотношения (3.2)—(3.3). Вместе с тем в класс, изучаемый Курцвейлем, попадают некоторые уравнения с несуммируемыми коэффициентами, поскольку ограниченность вариации $A(t)$, $B(t)$ при подходе Курцвейля не требуется. Ниже, говоря о матричных обобщенных уравнениях, мы обычно будем требовать ограниченность вариации «первообразных от коэффициентов», но не будем накладывать никаких ограничений на модули непрерывности в $C[a,b]$; более того, наибольшее внимание ниже уделяется разрывному случаю. Результаты настоящего параграфа являются, таким образом, независимыми по отношению к работам Курцвейля (а в части, относящейся к скалярным уравнениям n-го порядка, — существенно более сильными).

3.3. Как видно из предыдущих параграфов, можно, не ограничивая общности, рассматривать только однородные матричные уравнения с единичным начальным условием (это в той же степени относится к обобщенным уравнениям). Запишем такое уравнение в виде

$$dX = dM(t)X, \quad X(a) = I \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.4}$$

$M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$, или, переходя к интегральному уравнению,

$$X(t) = I + \int_a^t dM(s)X(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.5}$$

Вопрос о том, как интерпретировать эти равенства, является основным.

Пусть вначале $M(t)$ не только имеет ограниченную вариацию, но и непрерывна в $[a,b]$. Тогда все просто: интеграл в (3.5) есть обычный интеграл Римана—Стильтьеса. Нетрудно видеть (см., например, [5]), что уравнение (3.5) — а следовательно, и (3.4), которое по определению эквивалентно (3.5), — имеет единственное решение $X(t)$. Это решение, очевидно, также непрерывно и имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Оно может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. вычислением последовательных частичных сумм сходящегося ряда

$$X(t) = I + M(t) + \int_a^t dM(t_1)M(t_1) + \int_a^t dM(t_1)\int_a^{t_1} dM(t_2)M(t_2) + \ldots \tag{3.6}$$

Здесь и далее без ограничения общности предполагается, что

$$M(a) = 0.$$

Сходимость ряда (3.6) сразу следует из условия $V_a^b M < \infty$.

Ясно, что уравнения вида (3.4) или, что то же самое, (3.5) охватывают классические дифференциальные уравнения $\dot{X} = A(t)X$ с суммируемыми по Лебегу $A(t)$, так как достаточно положить

$$M(t) = \int_a^t A(s)\,ds \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

с интегрированием по Лебегу. Классический случай соответствует, таким образом, абсолютно непрерывным на $[a, b]$ $M(t)$.

Данное обобщение подкрепляется предложением о предельном переходе для уравнений

$$X_k(t) = I + \int_a^t dM_k(s)X_k(s), \quad k = 0, 1, \ldots (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.7}$$

Именно, если непрерывные $M_k(t)$ удовлетворяют условиям

$$V_a^b M_k \leqslant c < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.8}$$

$$M_k(t) \rightrightarrows M_0(t) \quad (k \to \infty)^*, \tag{3.9}$$

то $X_k(t) \rightrightarrows X_0(t)$ $(k \to \infty)$. Этот факт (см., например, [6]) непосредственно усматривается из сравнения рядов вида (3.6) для $M_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$; по существу он содержится также в более общих результатах § 2. Правда, формально § 2 относится к абсолютно непрерывным $M(t)$, но это требование фактически влияет лишь на форму записи, и все результаты § 2 легко распространяются на уравнения вида (3.4) с непрерывными $M(t)$ при соответствующих требованиях на вариации $m_{ij}(t)$. Остановимся в этой связи лишь на аналоге теоремы 2.2, который интересен тем, что не содержит ограничений, связанных с вариацией. Поэтому здесь представляется естественной другая трактовка, не связанная непосредственно с интегральным уравнением стильтьесовского типа (3.5) и примыкающая к концепции 2°.

3.4. Именно, рассмотрим уравнение, формально записанное следующим образом:

$$\frac{d}{dt}[e^{r_0(t)}x^{(n-1)}] + \dot{r}_1(t)x^{(n-2)} + \cdots + \dot{r}_{n-1}(t)x + \dot{r}_n(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.10}$$

Пусть вначале все $r_i(t)$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$, т. е. (3.10) есть классическое уравнение (2.23) с суммируемыми на $[a, b]$ коэффициентами

$$p_1(t) = \dot{r}_0(t), \quad p_i(t) = e^{-r_0(t)}\dot{r}_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \ldots, n+1.$$

---

*Символ $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость.

С точностью до несущественных постоянных последние равенства можно переписать в знакомом виде

$$r_0(t) = \int_a^t p_1(\tau)\, d\tau,\ r_i(t) = \int_a^t \Big(\exp \int_a^s p_1(\tau)\, d\tau\Big) p_{i+1}(s) ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через $C[a,b]_{n+1}$ пространство $n+1$-мерных непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций, а через $C_*[a,b]_{n+1}$ — подмножество этого пространства, состоящее из вектор-функций, абсолютно непрерывных на $[a,b]$. Пусть, далее $x_i(t)$ есть решение уравнения (3.10), удовлетворяющее начальным условиям (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$x_i^{(j)}(a) = \delta_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.11}$$

Отображение π, определенное формулой

$$\{r_0(t), r_1(t), \ldots, r_n(t)\} \to \{x_0^{(n-1)}(t), x_1^{(n-1)}(t), \ldots, x_n^{(n-1)}(t)\}, \tag{3.12}$$

преобразует $C_*[a,b]_{n+1}$ в себя и притом, как показывает теорема 2.2, непрерывно. Более того, просматривая оценки, на которых основывалось доказательство этой теоремы, нетрудно проверить, что π равномерно непрерывно (и даже удовлетворяет условию Липшица) во всякой ограниченной части $C_*[a,b]_{n+1}$. Поскольку $C_*[a,b]_{n+1}$ всюду плотно в $C[a,b]_{n+1}$, π допускает непрерывное продолжение на все пространство. Полученное таким образом отображение

$$\pi : C[a,b]_{n+1} \to C[a,b]_{n+1}$$

(также удовлетворяющее условию Липшица в каждом шаре) определяет естественным образом решения уравнения (3.10) при любых непрерывных $r_0, r_1, \ldots, r_n$. Итак, если непрерывным коэффициентам соответствуют решения класса $C^n[a,b]$, а суммируемым — класса $C_*^{n-1}[a,b]$ (т. е. с абсолютно непрерывной $x^{(n-1)}$), то теперь мы пришли к решениям класса $C^{n-1}[a,b]$. Описанная схема в определенном смысле является исчерпывающей для получения решений данного, так сказать «уровня обобщенности» (который, как будет видно из дальнейшего, не является пределом).

Подчеркнем, что, хотя решения уравнения (3.10) определены через аппроксимацию, для практического их отыскания нет необходимости приближать $r_i(t)$ гладкими функциями и решать полученную таким образом последовательность аппроксимирующих уравнений. Решения (3.10) могут быть и непосредственно записаны в виде сходящегося ряда, одинаково пригодного для гладкого и негладкого случаев, так как в его члены входят значения лишь $r_i(t)$, но не их производных.

3.5. До сих пор рассматривались уравнения с коэффициентами, которые являются — в обобщенном смысле — производными непрерывных функций. Такие уравнения представляют определенный теоретический интерес; однако с точки зрения приложений значительно более важен класс уравнений с «импульсными» коэффициентами, являющимися производными разрывных функций. К уравнениям этого типа мы и переходим.

Наиболее известный пример такого рода дает уравнение собственных колебаний струны

$$\ddot{x} + \lambda q(t)x = 0 \tag{3.13}$$

(при тех или иных краевых условиях), масса которой сосредоточена в виде отдельных «бусинок», т. е.

$$q(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta(t - t_i) \quad (c_i > 0, 1 \leqslant m \leqslant \infty). \tag{3.14}$$

Через $\delta(t)$ здесь и далее обозначается δ-функция. В первую очередь следует упомянуть известную работу М. Г. Крейна [7], где, в частности, на основе уравнения (3.13)—(3.14) была предложена наглядная «механическая» интерпретация классических исследований Стильтьеса по цепным дробям. В этой и последующих работах (по поводу которых см. монографию Ф. Аткинсона [5] с дополнениями И. С. Каца и М. Г. Крейна) развивалась спектральная теория уравнения (3.13) с $q(t)$, представляющей собой производную возрастающей и, вообще говоря, разрывной функции. На вопросах, связанных со спектральными разложениями симметричных операторов, при всей их важности, мы здесь не останавливаемся. Что касается самого понятия решения, то для уравнений данного вида — оно может быть определено несколькими эквивалентными способами — либо как решение соответствующего интегрального уравнения (М. Г. Крейн [7], И. С. Кац [8]), либо через «квазипроизводные» (В. Феллер [9]). Различные аспекты качественной теории также приводят к уравнениям с коэффициентами типа дельта-функций — зачастую в связи с экстремальными свойствами таких уравнений. Приведем пример, к которому неоднократно будем возвращаться в дальнейшем.

Пусть для уравнения

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{3.15}$$

с вещественным коэффициентом $q(t)$ таким, что

$$q(t + \omega) \equiv q(t), \quad q(t) \not\equiv 0, \quad \int_0^\omega q(t)dt > 0. \tag{3.16}$$

исследуется вопрос об устойчивости решений при $t \to \infty$. Общеизвестным достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\int_0^\omega q_+(t)dt \leqslant \frac{4}{\omega} \quad \bigl(q_+(t) = \max\{0, q(t)\}\bigr), \tag{3.17}$$

которое для $q(t) \geqslant 0$ было указано еще Ляпуновым [10]; обобщение в форме (3.17) принадлежит М. Г. Крейну [11]. Интерес представляет не только достаточность этого условия, но и тот хорошо известный факт, что постоянная 4 не может быть заменена никакой большей. Как кратчайшим образом доказать последнее утверждение? Совсем простой подсчет показывает, что уравнение (3.15) с коэффициентом

$$q(t) = \frac{4+\varepsilon}{\omega}\delta\Big(t - \frac{\omega}{2}\Big) \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega),\ q(t+\omega) \equiv q(t), \tag{3.18}$$

имеет неограниченные решения, если $\varepsilon \geqslant 0$; однако такая аргументация сама по себе не может быть признана исчерпывающей. Ведь в первую очередь интересна неулучшаемость условия (3.17) в классе «хороших» — например, непрерывных — коэффициентов; на коэффициенты типа дельта-функций признак (3.17), строго говоря, даже не рассчитан, как показывает случай $\varepsilon = 0$ (на самом деле (3.17) распространяется и на такие коэффициенты, если заменить знак неравенства на строгий). Чтобы полноправно пользоваться примерами типа (3.18), необходимо опираться на возможность соответствующего предельного перехода. В данном случае это означает, что при «дельтаобразной» аппроксимации коэффициента (3.18) непрерывными коэффициентами будет иметь место сходимость на $[0,\omega]$ соответствующих решений вместе с производными (при $t \neq \omega/2$). При этом удобнее взять в (3.18) не $\varepsilon = 0$, а произвольно малое $\varepsilon > 0$, что обеспечивает грубый характер неустойчивости (мультипликаторы вне единичной окружности).

Практически, чтобы избежать хлопот, обычно выбирают (см., например, Б. П. Демидович [12]) иной путь, а именно, не рассматривая уравнения (3.18), строят в явном виде последовательность уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами «дельтаобразного» типа и непосредственно проводят необходимые вычисления (которые в данном случае не очень велики). Однако ясно, что включение в общую теорию уравнений с коэффициентами типа дельта-функций — если оно подкреплено теоремами о предельном переходе — значительно упрощает рассмотрение подобных вопросов.

Идея изучения уравнений вида (3.4) с разрывной $M(t)$ сама по себе не нова. В частности, попытка изложения такого общего подхода имеется в упоминавшейся уже монографии [5] Ф. Аткинсона (с. 412—417), где можно найти также дальнейшие ссылки. Однако при подходе, изложенном в [5], по существу игнорируются некоторые принципиальные моменты, которые отсутствуют в случае систем, соответствующих уравнению (3.15), но неизбежно возникают при построении общей теории уравнения (3.4) с разрывной $M(t)$.

3.6. Предположим пока, как и в [5], что матрица-функция $M(t)$ ограниченной вариации непрерывна справа на $[a,b]$. Что следует понимать под решением обобщенного дифференциального уравнения (3.4)?

Переход от (3.4) к (3.5) не дает полного ответа, поскольку здесь в свою очередь возникает вопрос (которого не было в непрерывном случае) о том, как понимать интеграл в правой части (3.5). Трактовка в смысле Римана—Стильтьеса (Р.-С.) возможна, если, например, $X(t)$ непрерывна во всех точках разрыва $M(t)$; само уравнение (3.5) показывает, однако, что на это рассчитывать не приходится. Тем не менее, интегрирование по Р.-С. не обесценивается последним обстоятельством, свидетельствующим лишь о том, что здесь целесообразно перейти от общих матричных рассмотрений к более подробным поэлементным.

Обозначим через Ωf множество точек разрыва $f(t)$ на $[a, b]$. Легко видеть, что интеграл в (3.5) можно трактовать по Р.-С. в том и только том случае, если элементы матрицы $M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$ удовлетворяют следующему условию:

$$\Omega m_{ij} \bigcap \Omega m_{ki} = \varnothing \quad i, j, k \in [1, n]. \tag{3.19}$$

В самом деле, при этом условии интегральный оператор

$$AW = \int_a^t dM(s)W(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

переводит в себя многообразие матриц-функций $W(t) = \|w_{ij}(t)\|_1^n$, имеющих ограниченную вариацию в $[a, b]$, непрерывных справа и удовлетворяющих условию:

$$\Omega w_{ij} \bigcap \Omega m_{ki} = \varnothing \quad i, j, k \in [1, n].$$

Так как $M(t)$ принадлежит этому многообразию, то определены все итерации $A^s M$, $s = 1, 2, \ldots$, т. е. все члены ряда (3.6). Этот ряд и доставляет решение уравнения (3.5). Сходимость ряда и единственность решения проверяются обычным способом.

Отметим, что (3.19) содержит, в частности, требование непрерывности всех диагональных элементов $m_{ij}(t)$. Для матричного уравнения, соответствующего скалярному уравнению (3.15), условие (3.19) выполняется очевидным образом. В случае скалярного уравнения общего вида

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \tag{3.20}$$

(3.19) сводится к непрерывности первообразной* $p_1^V(t)$ от $p_1(t)$.

Описанное решение устойчиво относительно предельного перехода (должным образом определенного, см. ниже), так что случай (3.19) является во всех отношениях «хорошим» и по существу аналогичен рассмотренному ранее случаю непрерывной $M(t)$; в обоих вариантах решение дается

*Здесь и ниже через $p^V(t)$ обозначается первообразная функции $p(t)$, обращающаяся в нуль при $t = a$.

рядом (3.6) с интегрированием по Р.-С. Возникает естественный вопрос, насколько условие (3.19) отвечает существу дела и нельзя ли корректным способом определить решение для более широкого класса уравнений (3.4).

Общеизвестно, конечно, что интегрирование по Дарбу—Стильтьесу (Д.-С.) или Лебегу—Стильтьесу (Л.-С.) носит более общий характер. Здесь, однако, имеется один существенный момент, связанный со значениями решения в точках разрыва. Если при интегрировании по Р.-С. эти значения не влияют на поведение решения в других точках, то при интегрировании по Д.-С. или Л.-С. они приобретают решающее значение и произвольное доопределение $X(t)$ здесь уже не является оправданным.

3.7. Именно на таком доопределении основан фактически подход Ф. Аткинсона [5]. Внешне он выглядит иначе. Здесь не выделяется случай (3.19), а также не упоминаются интегралы Л.-С. или Д.-С. Вместо этого вводится следующая модификация интеграла Р.-С:

$$\int_a^c dM(s)X(s) = \lim \sum_{i=0}^{r-1} [M(t_{i+1}) - M(t_i)]X(t_i) \ (a = t_0 < \ldots < t_r = c) \quad (3.21)$$

при неограниченном измельчении разбиений $\{t_i\}$. Как отмечается в [5], если $M(t)$ и $X(t)$ непрерывны справа и имеют ограниченную вариацию на $[a, c]$, то такой интеграл (т. е. предел, не зависящий от последовательности разбиений) существует. Решением уравнения (3.5) Аткинсон называет непрерывную справа матрицу-функцию $X(t)$, удовлетворяющую при всех t равенству (3.5) с интегралом в смысле (3.21) (в [5] используется не матричная, а векторная запись решений, что для рассматриваемого вопроса не имеет значения). Устанавливается, что подобное решение существует, единственно и может быть получено методом последовательных приближений. Последнее эквивалентно представлению решения сходящимся рядом (3.6), где интегралы понимаются в смысле (3.21).

Далее в [5] отмечается, что вместо (3.21) могло быть использовано и несколько иное определение интеграла с помощью равенства

$$\int_a^c dM(s)X(s) = \lim \sum_{i=0}^{r-1} [M(t_{i+1}) - M(t_i)]X(t_{i+1}). \quad (3.22)$$

Это приводит, вообще говоря, к другому решению уравнения (3.5); такое решение может иногда и не существовать, что обеспечивает предпочтительность определения (3.21). Аткинсон выясняет, что оба определения совпадают, если скачки $M(t)$ удовлетворяют условию

$$[M(t) - M(t-0)]^2 \equiv 0. \quad (3.23)$$

Случай (3.23) оказывается здесь, таким образом, «хорошим», что подкрепляется далее (см. [5] с. 417, 418) соображениями инвариантности лагранжиана для решений самосопряженых уравнений.

Легко видеть, что интегралы, понимаемые в смысле (3.21), (3.22) не отличаются по существу от интегралов Л.-С. (для рассматриваемых классов матриц-функций). Следует лишь в варианте (3.21) переопределить значения $M(t)$, $X(t)$ в точках разрыва по непрерывности слева.

Условие (3.23) имеет определенное сходство с (3.19), но является менее ограничительным. К поставленному выше вопросу о том, насколько существенно (3.19), добавляется, таким образом, аналогичный вопрос относительно (3.23).

В [5] неоднократно подчеркивается, что основной целью монографии является вскрытие тесных связей между краевыми задачами для непрерывного случая (т. е. для классических уравнений) и дискретного случая (т. е. для уравнений с коэффициентами типа дельта-функций и аналогичных им конечноразностных уравнений). Естественно ожидать поэтому, что понятие решения должно быть в каком-то смысле корректно относительно «дельтаобразной» аппроксимации.

Рассмотрим с этой точки зрения один простой, но показательный пример — скалярное уравнение

$$\dot{x} + \delta(t)x = 0, \quad x(-1) = 1 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.24}$$

которое можно формально переписать также в виде интегрального уравнения

$$x(t) = 1 + \int_{-1}^{t} x(s)\, dm(s), \quad \text{где} \quad m(t) = \begin{cases} 0 & (-1 \leqslant t < 0) \\ 1 & (0 \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Очевидно $x(t) \equiv 1$ при $t < 0$. Чему равно $x(t)$ при $t > 0$?

Рассмотрим различные интерпретации. Так как условие (3.19) здесь не выполняется, то подход с точки зрения интегрирования по Р.-С. неприменим. Решение по Аткинсону (в основном варианте) имеет вид

$$x(t) \equiv 0 \quad (t > 0)$$

довольно-таки странный, поскольку речь идет о нетривиальном решении. Так как (3.23) не имеет места, вариант (3.22) дает другой ответ

$$x(t) \equiv 0,5 \quad (t > 0).$$

В то же время очевидно, что при аппроксимации $\delta(t)$ непрерывными «дельтаобразными» коэффициентами с последующим предельным переходом мы

получим
$$x(t) \equiv e^{-1} \quad (t > 0),$$
что и является, с нашей точки зрения, наиболее разумным вариантом, соответствующим, так сказать, «физическому смыслу» дельта-функции.

3.8. Переходим к точным формулировкам. Для этого следует прежде всего определить, что такое «дельтаобразная аппроксимация». Вопрос этот не столь прост, как может показаться на первый взгляд; стандартные схемы здесь не годятся. Как и ранее, будет удобнее говорить не о матрице коэффициентов, а о первообразной матрице $M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$, фигурирующей в (3.4), (3.5) (собственно, в аппроксимации $M(t)$ уже нет ничего «дельтаобразного»; этот термин относится, конечно, к аппроксимации $M(t)$).

Пусть $M(t)$ — произвольная матрица-функция ограниченной вариации на $[a, b]$ (вообще говоря, разрывная) и $\{M_k(t)\}$ — последовательность непрерывных матриц-функций ограниченной вариации. Нас интересует вопрос, когда из той или иной сходимости $M_k(t)$ к $M(t)$ вытекает та или иная сходимость решений уравнений
$$X_k(t) = I + \int_a^t dM_k(s)X(s), \quad k = 1, 2, \dots \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.25}$$
к некоторой матрице-функции $X(t)$. Последнюю в этом случае было бы целесообразно принять за решение уравнения (3.4).

Поскольку $M(t)$ разрывна, а $M_k(t)$ непрерывны, то равномерная сходимость M_k к M заведомо не годится. Таким образом, теоремы о предельном переходе, полученные в § 2, не могут быть непосредственно использованы в данном случае. Дело здесь не в том, что рассмотрения § 2 охватывают лишь абсолютно непрерывные матрицы-функции («стильтьесование» формулировок § 2 представляет собой несложную техническую задачу), а в том, что основной упор в § 2 был сделан именно на равномерную сходимость первообразных.

Потребуем, чтобы M_k сходилась к M точечно:
$$M_k(t) \to M(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad (k \to \infty). \tag{3.26}$$
Другим возможным вариантом является менее жесткое требование на $M_k(t) = \|m_{ij}^k(t)\|_1^n$: при всех i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$
$$m_{ij}^k(t) \to m_{ij}(t) \quad (t \in [a, b] \setminus \Omega m_{ij}) \quad (k \to \infty). \tag{3.27}$$
Оба варианта имеют свои преимущества. Мы в дальнейшем сосредоточимся, в основном, на (3.26).

Само по себе (3.26) не обеспечивает какого-либо сближения решений (за исключением скалярного случая $n = 1$). Любопытно, что стандартное дополнительное условие (3.8) равномерной ограниченности вариаций M_k в данном случае также не обеспечивает сходимости решений. Для иллюстрации положим

$$M_k(t) = \begin{pmatrix} (1 - |kt - 3|)_+ & 0 \\ (1 - |kt - 2|)_+ & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

здесь, как и в (3.17), $r_+(t) = \max\{0, r(t)\}$. Уравнения (3.25) эквивалентны в данном случае легко решаемым системам

$$\dot{y}_k = p_k(t) y_k, \quad \dot{z}_k = q_k(t) z_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3.28}$$

с кусочно-постоянными p_k, q_k. Фундаментальная матрица $X_k(t)$, соответствующая системе (3.28) при начальном условии $X_k(0) = I$ имеет на $[4k^{-1}, 1]$ вид

$$X_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 - e & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{4}{k} \leqslant t \leqslant 1\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак, несмотря на то, что при всех $t \in [0, 1]$ $M_k(t)$ стремятся к нулю (кстати, в данном примере это относится и к самим коэффициентам, а не только к первообразным от них), и на равномерную ограниченность вариаций $M_k(t)$, решения уравнений (3.25) ни в каком смысле (точечная сходимость, интегральная, по мере и т. п.) не приближаются к решению уравнения

$$\dot{X} = 0, \quad X(0) = I. \tag{3.29}$$

В данном конкретном случае $X_k(t)$ имеют точечный предел, но рассматривать его в качестве обобщенного решения (3.29) было бы, конечно, абсурдом; видоизменяя пример, нетрудно добиться, чтобы $X_k(t)$ при тех же условиях на $M_k(t)$ сходились к другому пределу или вообще не сходились. Итак, присоединение к (3.26) дополнительного условия (3.8) ничего не дает. Для того, чтобы исправить положение, заменим (3.8) более сильным требованием

$$V_a^b m_{ij}^k \to V_a^b m_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (k \to \infty). \tag{3.30}$$

Это существенно новое условие, в котором до сих пор не было необходимости; вместо (3.30) можно было бы довольствоваться ограничением

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} V_a^b m_{ij}^k \leqslant V_a^b m_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.31}$$

которое ввиду (3.26) эквивалентно (3.30).

Аппроксимация $M(t)$ ($V_a^b M < \infty$) непрерывными $M_k(t)$ с выполнением условий (3.26) и (3.30) всегда возможна. Покажем это.

Из вида соотношений (3.26), (3.30) явствует, что достаточно аппроксимировать каждый элемент $m_{ij}(t) = m(t)$ в отдельности. Далее предполагается, что $m(t)$ продолжен за промежуток $[a, b]$ следующим образом:

$$m(t) \equiv m(a) \quad (t < a); \quad m(t) \equiv m(b) \quad (t > b).$$

Кроме того, будет удобнее изменить параметризацию и говорить не о $k \to \infty$, а об $\varepsilon \downarrow 0$. Итак, требуется функцию $m(t)$ ограниченной вариации на $[a, b]$ аппроксимировать непрерывными $m_\varepsilon(t)$, так, чтобы

$$m_\varepsilon(t) \to m(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad (\varepsilon \downarrow 0), \tag{3.32}$$

$$V_a^b m_\varepsilon \to V_a^b m \quad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{3.33}$$

Пусть вначале $m(t)$ непрерывна справа. Положим

$$m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} m(s) ds \quad (a \leqslant t \leqslant b; \quad \varepsilon > 0).$$

Выполнение (3.32) очевидно. Так как $m_\varepsilon(t)$ абсолютно непрерывны, то

$$\begin{aligned} V_a^b m_\varepsilon = \int_a^b |\dot{m}_\varepsilon(t)|\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b |m(t+\varepsilon) - m(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b V_t^{t+\varepsilon} m\, dt = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b V_a^{t+\varepsilon} m\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b V_a^t m\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} V_a^t m\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} V_a^t m\, dt = \\ = V_a^b m - \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} V_a^t m\, dt \leqslant V_a^b m. \end{aligned}$$

Ввиду (3.32) отсюда следует (3.33).

Если $m(t)$ непрерывна слева, аналогично ведут себя функции

$$m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t m(s)\, ds \quad (a \leqslant t \leqslant b; \quad \varepsilon > 0).$$

Переходим к общему случаю. Произвольную функцию ограниченной вариации на $[a, b]$ можно представить в виде

$$m(t) = m^*(t) + m^{**}(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где $m^*(t)$ непрерывна справа, $m^{**}(t)$ — слева и, кроме того,

$$V_a^b m = V_a^b m^* + V_a^b m^{**}.$$

В самом деле, достаточно, например, положить

$$m^*(t) = \sum_{a<t_i\leqslant t} [m(t_i) - m(t_i - 0)], \quad m^{**}(t) = m(t) - m^*(t),$$

где $\{t_i\}$ — совокупность точек разрыва $m(t)$.

Аппроксимируя отдельно m^* и m^{**}, как это делалось выше, приходим к функциям

$$m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_t^{t+\varepsilon} m^*(s)ds + \int_{t-\varepsilon}^{t} m^{**}(s)ds\Big] \quad (a \leqslant t \leqslant b;\ \varepsilon > 0). \qquad (3.34)$$

Условие (3.32), очевидно, выполняется. Далее,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, V_a^b m_\varepsilon \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} V_a^b\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} m^*(s)\,ds\Big) + \\ + \lim_{\varepsilon\to 0} V_a^b\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} m^{**}(s)\,ds\Big) = V_a^b m^* + V_a^b m^{**} = V_a^b m.$$

Отсюда, согласно (3.32), вытекает и второе условие (3.33).

Итак, в топологии, порожденной сходимостью (3.26), (3.30), множество непрерывных матриц-функций всюду плотно в множестве матриц-функций ограниченной вариации. Вместо непрерывных здесь можно было бы говорить и о гладких матрицах-функциях. Подчеркнем, что речь идет о сходимости, не согласованной с линейными операциями (из сходимости M_k к M не вытекает сходимость $M_k - M$ к нулю).

3.9. Описав «дельтаобразную» аппроксимацию коэффициентов, поясним, как она используется.

Назовем уравнение (3.4) *δ-корректным,* если для любой последовательности непрерывных $M_k(t)$, удовлетворяющей условиям (3.26)—(3.30), решения $x_k(t)$ уравнений (3.25) имеют предел при всех $t \in [a, b]$.

Ясно, что для δ-корректного уравнения этот предел не зависит от выбора конкретной последовательности $\{M_k\}$. Этот предел и возьмем за определение решения δ-корректного уравнения (3.4). Очевидно, что для непрерывной $M(t)$ такой предел — если он существует — не может отличаться от обычного решения, доставляемого рядом (3.6). Поэтому существенное значение имеет вопрос, насколько широк класс δ-корректных уравнений.

Как и ранее, через Ωf обозначается множество точек разрыва $f(t)$ в $[a, b]$. Пусть, далее, $\Omega^+ f$, $\Omega^- f$ суть множества точек разрыва $f(t)$ в $[a, b]$ справа и слева соответственно.

Имеет место следующий критерий δ-корректности.

Теорема 3.1. *Уравнение* (3.4) *δ-корректно в том и только том случае, если элементы матрицы $M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$ удовлетворяют условию*

$$\Omega^+ m_{ij} \bigcap \Omega^+ m_{ki} = \Omega^- m_{ij} \bigcap \Omega^- m_{ki} = \varnothing \tag{3.35}$$

для любых трех индексов i, j, k из $[1, n]$, среди которых хотя бы два различны.

В частности, для непрерывных справа $M(t)$, о которых шла речь в п. 3.6, 3.7, условие δ-корректности имеет вид

$$\Omega m_{ij} \bigcap \Omega m_{ki} = \varnothing \quad (1 \leqslant i, j, k \leqslant n; |i-j| + |i-k| > 0). \tag{3.36}$$

Разумеется, это же условие относится и к $M(t)$, непрерывным слева. В целом же (3.36), будучи более жестким, чем (3.35), является достаточным, но не необходимым условием δ-корректности. В случае выполнения (3.36) будем говорить о *прочной* δ-корректности; уравнения с $M(t)$, удовлетворяющей условию (3.36), остаются δ-корректными при любом переопределении $M(t)$ в точках разрыва. Уравнения с непрерывными $M(t)$ заведомо являются прочно δ-корректными. Это же относится и к уравнениям с $M(t)$, удовлетворяющими условию (3.19); также и в этом случае оба определения решения (через интегрирование по Р.-С. и через δ-корректность) совпадают. Проверка сводится к несложной технической работе с рядами вида (3.6).

Итак, введенное с помощью предельного перехода понятие решения обобщает решения в смысле Р.-С, поскольку даже для непрерывных справа $M(t)$ условие δ-корректности выполняется для более широкого класса матриц-функций, чем условие (3.19). Ясно, что в этом случае (т. е. для непрерывных справа M) обобщение относится по существу к диагональным элементам $m_{ii}(t)$, которые теперь могут быть разрывными. Возвратимся, в частности, к уравнению (3.20). Тогда как требование (3.19) заключалось в непрерывности $p_1^V(t)$, условие прочной δ-корректности (3.36) сводится к тому, чтобы $p_1^V(t)$ не имела общих точек разрыва ни с одной из функций $p_2^V(t), \ldots, p_{n+1}^V(t)$.

Итак, (3.19) достаточно, но не необходимо для δ-корректности (и даже для прочной δ-корректности). В то же время менее ограничительное условие Ф. Аткинсона (3.23) не является ни необходимым, ни достаточным. Об отсутствии необходимости свидетельствует уравнение (3.24), которое (как и всякое скалярное уравнение $\dot{x}+p(t)x = 0$) прочно δ-корректно, хотя (3.23) здесь не выполнено. С другой стороны, рассмотрим матрицу-функцию второго порядка

$$M(t) = 0 \quad (-1 \leqslant t < 0), \quad M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.37}$$

которой соответствует система уравнений

$$\dot{y} = \dot{z} = \delta(t)y - \delta(t)z \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1); \tag{3.38}$$

здесь выполнено (3.23), но δ-корректность отсутствует. Отметим, что для области применимости условий δ-корректности (3.35) и (3.36) имеет значение форма, в которой задано уравнение. Если уравнение имеет вид (3.5) с определенной всюду $M(t)$, то естественно применять условие (3.35). Это же относится к «коэффициентной» форме, если только входящие в состав коэффициентов компоненты типа дельта-функций имеют вид $c_i\delta(t - t_i + 0)$ или $c_i\delta(t - t_i - 0)$, поскольку в этом случае $M(t)$ однозначно восстанавливается. Однако при обычно встречающихся компонентах вида $c_i\delta(t - t_i)$ доопределение первообразных в точках разрыва t_i является актом произвола, так что для таких уравнений следует пользоваться условием (3.36). Например, по уравнениям (3.38) нельзя восстановить $M(0)$; поэтому точнее было бы сказать выше, что матрице $M(t)$, определенной равенствами (3.37), соответствует не система (3.38), а система

$$\dot{y} = \dot{z} = \delta(t+0)y - \delta(t+0)z \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

(здесь δ-корректность отсутствует независимо от значения $M(0)$). Вообще, для коэффициентов с компонентами вида $c_i\delta(t - t_i)$ более целесообразно определение дельтаобразной аппроксимации коэффициентов формулой (3.27) вместо (3.26), поскольку у нас нет значений $M(t)$ в точках разрыва; что касается условия (3.30), то здесь при вычислении $V_a^b m_{ij}$ коэффициент $m_{ij}(t)$ доопределяется для $t \in \Omega m_{ij}$ по непрерывности справа или слева. Разумеется, при этом следует говорить о сходимости решений не всюду на $[a, b]$, а лишь в точках непрерывности $M(t)$; точнее, область сходимости для элемента x_{ik} матрицы $X(t)$ имеет вид

$$[a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \Omega m_{ij}.$$

3.10. Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 3.1, напомним понятие интеграла Дарбу—Стильтьеса (мы придерживаемся терминологии И. Н. Песина [13]; в монографии Э. Х. Гохмана [14] этот интеграл именуется просто интегралом Стильтьеса). Одно из нескольких эквивалентных определений интеграла

$$(\text{Д.-С.}) \int_a^b f(t)\, dg(t) \quad (V_a^b g < \infty) \tag{3.39}$$

состоит в том, что к определению интеграла Р.-С. добавляется требование включения каждой точки разрыва $g(t)$ во все разбиения $[a, b]$, начиная с некоторого. Интеграл Д.-С. шире, чем интеграл Р.-С. и, в отличие от последнего, аддитивен в следующем смысле: если существуют $\int_a^c$, $\int_c^b$ $(a < c < b)$, то существует и $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$. Если обе функции f, g имеют ограниченную вариацию в $[a, b]$ — а мы будем иметь дело только с этим случаем — то для существования интеграла (3.39) необходимо и достаточно, чтобы

$$\Omega^+ f \bigcap \Omega^+ g = \Omega^- f \bigcap \Omega^- g = \varnothing. \tag{3.40}$$

Для непрерывных справа функций интегралы Д.-С. и Р.-С. совпадают (почему в п. 3.6 мы говорили лишь об интегрировании по Р.-С). Поскольку теперь $M(t)$ не предполагается непрерывной справа, естественно распространить сказанное там на уравнения (3.5) с интегралом в смысле Д.-С. Именно, такое уравнение имеет решение в том и только том случае, если

$$\Omega^+ m_{ij} \bigcap \Omega^+ m_{ki} = \Omega^- m_{ij} \bigcap \Omega^- m_{ki} = \varnothing \quad \text{при любых} \quad i, j, k. \tag{3.41}$$

Это решение единственно и дается рядом (3.6) (с интегралами по Д.-С., разумеется). Сказанное вытекает из тех же соображений, которые относились к интегрированию по Р.-С.

Условие (3.41) относится к (3.35) примерно так же, как (3.19) к (3.36): оно накладывает дополнительное требование непрерывности диагональных элементов $m_{ii}(t)$.

3.11. Введем краткую запись "$f_k \circ\!\!\to f$" для сходимости

$$f_k(t) \to f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad V_a^b f_k \to V_a^b f \quad (k \to \infty).$$

Нам понадобятся некоторые факты, относящиеся к такой сходимости (которая ввиду своего нелинейного характера, видимо, мало изучена).

1°. Если $f_k \circ\!\!\to f$, то $V_a^t f_k \circ\!\!\to V_a^t f$.

2°. Пусть $f_k \circ\!\!\to f$ и $|f(t_0 + 0) - f(t_0)| < \varepsilon$ для некоторого $t_0 \in [a, b)$. Тогда найдется $t_1 \in (t_0, b]$ такое, что

$$|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0(\varepsilon) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Точно так же, если $|f(t_0) - f(t_0 - 0)| < \varepsilon \quad (a < t_0 \leqslant b)$, то найдется отрезок $[t_1, t_0]$, удовлетворяющий аналогичному условию.

3°. Пусть $p_k \circ\!\!\to p$, $q_k \circ\!\!\to q$, $\Omega^+ p \bigcap \Omega^+ q = \Omega^- p \bigcap \Omega^- q = \varnothing$. При любом $\varepsilon > 0$ существует разложение $[a, b]$ в виде

$$[a, b] = \Delta_1 \bigcup \Delta_2 \tag{3.42}$$

такое, что: а) Δ_1, Δ_2 суть конечные системы отрезков, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек (так что любой интеграл Д.-С. по $[a, b]$ есть сумма интегралов по Δ_1 и Δ_2); б) вариация каждой $p_k(t)$ на Δ_1 меньше ε при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$; в) $|q_k(t) - q(t)| < \varepsilon$ при $t \in \Delta_2, k \geqslant k_0(\varepsilon)$.

Доказательства утверждений 1°—3° достаточно очевидны; в частности, 3° вытекает из 1°, 2° и леммы о конечном покрытии.

4°. Пусть функция $r(z)$ удовлетворяет условию Липшица в каждом круге. Пусть, далее, $f_k(t)$, $g_k(t)$, непрерывны, $f_k \circ\!\!\to f$, $q_k \circ\!\!\to q$, и выполнено (3.40). Тогда

$$\int_a^b r[f_k(t)]\, dg_k(t) \to (\text{Д.-С.}) \int_a^b r[f(t)]\, dg(t) \quad (k \to \infty). \tag{3.43}$$

В дальнейшем указание на интегрирование по Д.-С. обычно опускается. В силу предположений $V_a^b r[f(t)] < \infty$; кроме того, (3.40), очевидно, сохраняется при замене $f(t)$ на $r[f(t)]$; поэтому интеграл в правой части (3.43) существует. Имеем

$$\int_a^b r[f_k] dg_k - \int_a^b r[f]\, dg = \int_a^b (r[f_k] - r[f])\, dg_k + r[f(t)]\big[g_k(t) - g(t)\big]\Big|_a^b + \\ + \int_a^b (g - g_k)\, dr[f] = I + II + III.$$

Нужно показать, что I и III стремятся к 0 при $k \to \infty$ (для II это очевидно). Ясно, что f_k, g_k равномерно ограничены вместе с вариациями: $f_k(t)$, $g_k(t)$, $V_a^b f_k$, $V_a^b g_k \leqslant c < \infty$ $(a \leqslant t \leqslant b;\ k = 1, 2, \dots)$.

Обозначим через m и l соответственно максимум модуля и константу Липшица функции $r(z)$ в круге $|z| \leqslant c$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть Δ_1, Δ_2 определяют фигурирующее в 3° разложение (3.42) для $p_k = g_k$, $q_k = f_k$ (и, разумеется, $p = g$, $q = f$). Тогда при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$|I| \leqslant \int\limits_{\Delta_1} \big|r[f_k] - r[f]\big|\, |dg_k| + \int\limits_{\Delta_2} \big|r[f_k] - r[f]\big|\, |dg_k| \leqslant 2m\varepsilon + l\varepsilon.$$

Для оценки III возьмем разложение (3.42) для $p_k = f_k$, $q_k = g_k$. Так как $V_a^b r[f] \leqslant l V_a^b f$, то при больших k

$$|III| \leqslant \int\limits_{\Delta_1} \big|g - g_k\big| |dr[f]| + \int\limits_{\Delta_2} \big|g - g_k\big| |dr[f]| \leqslant 2cl\varepsilon + cl\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε 4° доказано. Отметим, между прочим, что из предпосылок 4° не вытекает соотношение $r[f_k(t)] \circ\!\!\to r[f(t)]$.

Предшествующее имело своей целью следующий факт.

5°. В условиях 4°

$$\int_a^t r[f_k(t)]\,dg_k(t) \circ\!\!\to \text{(Д.-С.)} \int_a^t r[f(t)]\,dg(t).$$

Точечная сходимость вытекает из 4°, поскольку $[a,b]$ можно без ограничения общности (ввиду 1°) заменить на $[a,t]$. Итак, нужно проверить лишь сходимость вариаций

$$\int_a^b \bigl|r[f_k(t)]\bigr|\,|dg_k(t)| \to \int_a^b \bigl|r[f(t)]\bigr|\,|dg(t)|,$$

но и это соотношение выводится из 4° с помощью переобозначений:

$$\tilde r(z) = |r(z)|,\ \tilde g_k(t) = V_a^t g_k,\ \tilde g(t) = V_a^t g \quad (\tilde g_k \circ\!\!\to \tilde g \quad \text{в силу } 1°).$$

3.12. Переходим непосредственно к доказательству теоремы 3.1. Пусть выполнено (3.35) и непрерывные $M_k(t) \circ\!\!\to M_0(t) = M(t)$, т. е. имеют место соотношения (3.26), (3.30). Покажем, что тогда решения $X_k(t)$ уравнений (3.25) сходятся при любом $t \in [a,b]$.

Не ограничивая общности, можно считать, что M_k (а следовательно, и X_k непрерывно дифференцируемы в $[a,b]$ $(k = 1,2,\dots)$). Действительно, при любом $k \geqslant 1$

$$M_k^\varepsilon(t) \overset{Df}{=} \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t M_k(s)\,ds \in C^1[a,b] \quad (M_k(t) \equiv 0 \text{ при } t \leqslant a),$$
$$M_k^\varepsilon \rightrightarrows M_k,\ M_k^\varepsilon \circ\!\!\to M_k \quad (\varepsilon \downarrow 0);$$

поэтому (см. п. 3.3) для решений соответствующих уравнений имеем $X_k^\varepsilon \rightrightarrows X_k$ $(\varepsilon \downarrow 0)$. Таким образом, если последовательность $\{X_k(t)\}$ не сходится при $k \to \infty$ в какой-либо точке из $[a,b]$, то это же будет иметь место и для $\{X_k^\varepsilon(t)\}$ при достаточно быстро убывающих ε_k.

Итак, уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\dot X_k = \dot M_k(t) X_k, \quad X_k(a) = I, \quad k = 1,2,\dots \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.44}$$

с обычными производными. Введем диагональные матрицы-функции

$$D_k(t) = \begin{pmatrix} e^{m_{11}^k(t)} & & 0 \\ & e^{m_{22}^k(t)} & \\ 0 & \ddots & e^{m_{nn}^k(t)} \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,\dots,$$

и произведем в (3.44) замену

$$X_k = D_k(t)Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.45}$$

Тогда уравнения (3.44) перейдут в уравнения

$$\dot{Y}_k = \dot{Q}_k(t)Y_k, \quad Y_k(a) = I, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.46}$$

где элементы матриц $Q_k(t) = \|q_{ij}^k(t)\|_1^n$ как легко подсчитать, имеют вид:

$$q_{ii}^k(t) \equiv 0,\ q_{ij}^k(t) = \int_a^t e^{m_{jj}^k(\tau) - m_{ii}^k(\tau)} dm_{ij}^k(\tau) \text{ при } i \neq j\ (1 \leqslant i, j \leqslant n). \tag{3.47}$$

Определим $Q_0(t) = \|q_{ij}^0(t)\|_1^n$ теми же соотношениями (3.47) с $k = 0$. Поскольку $m_{ij}^k \circ\!\!\to m_{ij}^0$, то

$$Q_k(t) \circ\!\!\to Q_0(t). \tag{3.48}$$

Это вытекает из предложения 5° предыдущего пункта. Правда, соотношение $m_{ii}^k - m_{jj}^k \circ\!\!\to m_{ii}^0 - m_{jj}^0$, вообще говоря, не выполняется, но, так как

$$q_{ij}^k(t) = \int_a^t e^{m_{jj}^k}(\tau)\, d\Big[\int_a^\tau e^{-m_{ii}^k(s)} dm_{ij}(s)\Big] \quad (i \neq j),$$

то дело сводится к двукратному применению 5° (с $r(z) = e^{\pm z}$).

Решения уравнений (3.46) имеют вид

$$Y_k(t) = I + Q_k(t) + \int_a^t dQ_k(t_1)Q_k(t_1) + \\ + \int_a^t dQ_k(t_1) \int_a^t dQ_k(t_2)Q_k(t_2) + \ldots. \tag{3.49}$$

Мы пишем dQ_k вместо $\dot{Q}_k dt$, так как намереваемся рассмотреть и $Y_0(t)$, определенную той же формулой (3.49). Последняя сохраняет смысл и при $k = 0$. Действительно, ввиду (3.47) q_{ii}^0 непрерывны, а q_{ij}^0 при $i \neq j$ имеют те же точки разрывов справа и слева, что и m_{ij}^0 ($= m_{ij}$); отсюда, в силу (3.35), вытекает выполнение для Q_0 условия вида (3.41) (с заменой m_{ij} на q_{ij}^0). Поэтому, согласно п. 3.10, все интегралы, входящие в ряд (3.49) при $k = 0$, существуют в смысле Д.-С, а сам ряд представляет решение уравнения

$$Y_0(t) = I + (\text{Д.-С.}) \int_a^t dQ_0(s)Y_0(s),$$

что, впрочем, для нас сейчас несущественно.

Покажем теперь, что

$$Y_k(t) \to Y_0(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.50}$$

Ввиду (3.48) вариации $Q_k(t)$ ограничены в совокупности некоторой константой c, поэтому члены ряда (3.49) равномерно по t мажорируются соответствующими членами ряда $e^c = 1 + c + c^2/2 + \ldots$ (напомним, что $Q_k(0) = 0$). Таким образом, чтобы установить (3.50), достаточно проверить почленную сходимость рядов. Соотношение

$$\int_a^t dQ_k(t_1)Q_k(t_1) \circ\!\!\to \int_a^t dQ_0(t_1)Q_0(t_1) \tag{3.51}$$

получается из (3.48) применением замечания 5° предыдущего пункта к элементам входящих в (3.51) матриц-функций; повторное применение 5° приводит к аналогичным соотношениям для последующих членов рядов (3.49). Это доказывает (3.50).

Так как, очевидно, $D_k(t) \to D_0(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, то из (3.45), (3.50) заключаем, что

$$X_k(t) \to D_0(t)Y_0(t) \text{ при всех } t \in [a, b] \quad (k \to \infty),$$

что и требовалось. Таким образом, мы не только установили существование предела, но и записали его в «явном» виде — как произведение $D_0(t)$ на ряд (3.49) при $k = 0$ (с интегралами Д.-С).

Для завершения доказательства теоремы 3.1 осталось проверить необходимость условия (3.35), что сводится к очевидной «перестановке порядка импульсов». Небольшая тонкость имеется лишь в связи с тем, что скачки $m_{ii}(t)$ могут оказаться равными $2\pi il$, где $l \neq 0$ — целое; в этом случае они должны быть предварительно представлены в виде $2\pi il' + 2\pi il''$, где l', l'' — нецелые положительные числа, $l' + l'' = l$.

3.13. Мы рассмотрели вопрос об аппроксимации разрывных $M(t)$ непрерывными. В общей теории предельного перехода для обобщенных уравнений это один из частных случаев, важный в теоретическом отношении ввиду своей связи с определением решения. Другим интересным случаем является, наоборот, аппроксимация непрерывных $M(t)$ разрывными и, в первую очередь, кусочно-постоянными. Такая аппроксимация важна для вычислительных аспектов. Изучение ее в определенном смысле проще, поскольку здесь легко обеспечить равномерную сходимость первообразных. Выбор того или иного определения решения здесь теряет актуальность, так как в пределе все скачки аннулируются. Подробнее на этом не останавливаемся.

Итак, для δ-корректных уравнений решение можно определить на основе предельного перехода. Что касается δ-некорректных уравнений, то здесь каждая точка разрыва, нарушающая условие δ-корректности (3.35), порождает «воронку» решений, предельных при том или ином способе аппроксимации (3.26)—(3.30). Тем не менее, можно дать общее определение решения, не связанное с какими-либо специальными свойствами $M(t)$, кроме ограниченности вариации; для этого следует выделить из воронки решения, естественные с какой-то точки зрения. Примем, что скачки $M(t)$ действуют на $X(t)$ следующим образом:

$$X(t) \equiv e^{M(t)-M(t-0)}X(t-0), \quad X(t+0) \equiv e^{M(t+0)-M(t)}X(t). \qquad (3.52)$$

Смысл этого предположения состоит, приблизительно говоря, в том, что импульсные компоненты коэффициентов, расположенные в бесконечно-малой полуокрестности какой-либо точки, рассматриваются как «порожденные одним и тем же импульсом». В частности, именно к таким решениям приводит в пределе аппроксимация элементов $m_{ij}(t) = m(t)$ по формуле (3.34), если брать общее ε для всех коэффициентов. К решениям типа (3.52) можно прийти с помощью замены переменной

$$\tau = \tau(t) = \sum_{i,j=1}^{n} V_a^t m_{ij}, \qquad (3.53)$$

если на всех отрезках $[\tau(t_i-0), \tau(t_i)], [\tau(t_i), \tau(t_i+0)]$, в которые «растягиваются» точки t_i разрыва $M(t)$, считать функции $m_{ij}(\tau)$ линейными (т. е. соответствующие коэффициенты — постоянными).

Аналитически решения, удовлетворяющие условию (3.52), можно записать в виде мультипликативного интеграла Д.-С.

$$X(t) = \int_a^t e^{dM(s)} \overset{Df}{=} \lim \prod_{t=0}^{r-1} e^{M(t_{i+1})-M(t_i)} \quad (a = t_0 < \dots < t_r = t) \qquad (3.54)$$

(порядок сомножителей — естественный), где предел берется по неограниченно измельчающимся разбиениям $\{t_i\}$, подчиненным дополнительному условию: каждая точка разрыва $M(t)$ входит во все разбиения, начиная с некоторого. Это условие не нужно, если $M(t)$ непрерывна справа (или слева); для таких $M(t)$ решение (3.54) приобретает особенно простой вид (см. также работу А. Д. Мышкиса и А. М. Самойленко [15]).

Близкое понятие мультипликативного интеграла Стильтьеса было введено ранее В. П. Потаповым [16], хотя и не вполне корректно. Без каких-либо оговорок о точках разрыва в [16] утверждается, что предел (3.54) существует при произвольных измельчающихся разбиениях (и не зависит от них) для любой матрицы-функции $M(t)$ ограниченной вариации (в определении

В. П. Потапова фигурирует еще непрерывный множитель $f(t)$, который в нашем случае равен 1). Что это не так, показывает пример

$$M(t) = 0 \ (0 \leqslant t < 1), \quad M(1) = C_1, \ M(t) = C_1 + C_2 \ (1 < t \leqslant 2).$$

Если 1 входит в разбиение $\{t_i\}$, произведение равно $e^{C_1}e^{C_2}$, в противном случае оно равно $e^{C_1+C_2}$. Таким образом, если не довольствоваться скалярным случаем, определение, данное в [16], нуждается в уточнении (можно, например, потребовать, чтобы все точки разрыва были односторонними). Отметим, что данная погрешность не влияет на остальные результаты фундаментальной монографии В. П. Потапова, относящиеся к случаю непрерывной $M(t)$.

Для δ-корректных уравнений решение (3.54) совпадает с тем, которое определенно выше через предельный переход; это является серьезным преимуществом по сравнению с обоими вариантами решения по Аткинсону (для непрерывных справа $M(t)$, см. п. 3.7). Если же уравнение δ-некорректно, то решение (3.54), как уже говорилось, заведомо является одной из предельных матриц-функций при аппроксимации (3.26)— (3.30) — опять-таки в отличие от решений, введенных в [5]. Далее, решение (3.54) всегда существует, в отличие от решения в смысле (3.22) и, кроме того, является невырожденной при всех $t \in [a, b]$ матрицей-функцией, в отличие от решений в смысле (3.21). Наконец, существенная для тематики [5] инвариантность лагранжиана в самосопряженном случае заведомо имеет место для решений (3.54), независимо от выполнения (3.23). Кстати, подлинный смысл последнего условия состоит как раз в том, что в случае (3.23) решения по Аткинсону совпадают с решением (3.54). Поэтому, если с самого начала вместо определений Аткинсона пользоваться определением (3.54), то дополнительное ограничение (3.23) становится совершенно излишним (для δ-корректности, как уже говорилось, оно не является ни необходимым, ни достаточным).

Существование предела (3.54), равно как и упомянутые свойства такого решения проверяются, например, при помощи замены (3.53) с указанным способом доопределения $m_{ij}(\tau)$.

3.14. Можно было бы предположить, что все возникающие в приложениях обобщенные уравнения являются δ-корректными; к сожалению, это не так. Рассмотрим один иллюстрирующий пример.

Во многих вопросах интересны условия, при которых каждое нетривиальное решение уравнения с вещественными коэффициентами

$$Lx \equiv \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (-a \leqslant t \leqslant a) \tag{3.55}$$

имеет не более одного нуля в $[-a, a]$. В этом случае говорят о неосцилляции решений (3.55) в $[-a, a]$, которую будем кратко записывать в виде

$L \in T_0[-a, a]$. Для приложений удобны признаки неосцилляции, состоящие в ограничениях на нормы $p(t)$, $q(t)$ в тех или иных функциональных пространствах; ввиду теоремы Штурма можно применять оценки для $q_+(t)$ вместо $q(t)$. Для норм в $C[-a, a]$ соответствующий точный результат был получен Г. Эфезером [17] и впоследствии передоказывался многими авторами (в частности, он послужил темой одного из сообщений на Конгрессе 1966 г.). Смысл этого результата состоит в том, что при условиях $|p(t)| \leqslant a$, $q(t) \leqslant \beta$ критическими являются коэффициенты $p(t) = -\alpha \operatorname{sign} t$, $q(t) \equiv \beta$ (соответствующее явное условие неосцилляции в терминах α, β легко выписать). Не меньший интерес представляют нормы в $L_1[-a, a]$, для которых точный результат [18] таков: необходимым и достаточным условием импликации

$$\left\{ \int_{-a}^{a} |p(t)| dt \leqslant \alpha, \int_{-a}^{a} q_+(t) dt \leqslant \beta \right\} \to L \in T_0[-a, a]$$

является неравенство $e^{\alpha/2}\beta \leqslant 2/\alpha$. Для нас сейчас интересна лишь необходимость этого условия. Критическое уравнение здесь оказывается δ-некорректным: соответствующие первообразные имеют вид

$$p^V(t) = \frac{\alpha}{2}(1 - |\operatorname{sign} t|), \quad q^V(t) = \frac{\beta}{2}(1 + |\operatorname{sign} t|). \tag{3.56}$$

Критическое решение определяется условием $\dot{x}(0) = 0$ $(x(0) \neq 0)$, но выражения (3.56) еще не позволяют определить поведение этого решения (как и других) ввиду δ-некорректности. В данном случае ясность может быть внесена следующей записью, устанавливающей «очередность» импульсов:

$$p(t) = \frac{\alpha}{2}\delta(t + 0 + 0) - \frac{\alpha}{2}\delta(t - 0 - 0), \quad q(t) = \frac{\beta}{2}\delta(t + 0) + \frac{\beta}{2}\delta(t - 0).$$

Если поменять порядок импульсов или рассматривать их как «одновременные», понимая решение в смысле (3.54), расстояния между нулями решений окажутся совсем иными и не будут доставлять искомого минимума.

3.15. В заключение вернемся ненадолго к уравнениям n-го порядка, причем ограничимся уравнениями без члена с $x^{(n-1)}$:

$$x^{(n)} + \dot{r}_1(t)x^{(n-2)} + \cdots + \dot{r}_{n-1}(t)x + \dot{r}_n(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.57}$$

В п. 3.4 был рассмотрен (для уравнения более общего вида) случай непрерывных $r_i(t)$, а развитая выше теория матричных обобщенных уравнений охватывает $r_i(t)$ ограниченной вариации; оба эти варианта являются независимыми расширениями класса абсолютно непрерывных $r_i(t)$. Специфика уравнения (3.57) позволяет, однако, пойти существенно дальше, ограничившись лишь предположением

$$r_i(t) \in L_2[a,b], \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.58}$$

В точке $t = a$ функции r_i будем считать определенными, т. е. по существу рассматривается пополнение $C[a,b]$ по норме

$$\|f\| = |f(a)| + \Big(\int_a^b |f(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Рассмотрим наряду с (3.57) произвольную последовательность уравнений

$$x_k^{(n)} + \dot r_{1,k}(t) x_k^{(n-2)} + \dots + \dot r_{n-1,k}(t) x_k + \dot r_{n,k}(t) = 0$$
$$k = 1, 2, \dots \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.59}$$

с абсолютно непрерывными $r_{i,k}(t)$ такими, что

$$r_{i,k}(t) \to r_i(t) \text{ в } L_2[a,b], \;\; r_{i,k}(t_0) \to r_i(t_0) \;\; i = 1, 2, \dots, n \;\; (k \to \infty). \tag{3.60}$$

(предполагается, что функции $r_1, \dots, r_n$ определены и конечны в точке t_0). Зададимся какими-либо начальными условиями

$$x_k^{(i)}(t_0) = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Оказывается, из (3.60) вытекает сходимость $x_k(t)$ в $W_2^{n-1}[a,b]$, причем предельная функция $x(t)$ не зависит от выбора последовательности (3.59). Эта функция $x(t)$ ($\in W_2^{n-1}[a,b]$) и принимается за решение (3.57) при начальных условиях $x^{(i)}(t_0) = c_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. В случаях $r_i \in C[a,b]$ или $V_a^b r_i < \infty$ $(i = 1, \dots, n)$ $x(t)$, разумеется, совпадает с решениями в прежнем смысле.

Доказательство сходимости $x_k(t)$ может быть проведено с общих матричных позиций, на основе примерно тех же преобразований, которые применялись в § 2. Существенное значение при этом приобретает неиспользованный в § 2 «резерв», состоящий в том, что постоянная матрица B, определенная, как в (1.14), не только суммируема, но и ограничена на $[a,b]$. Более специфический путь таков: уравнения (3.59) почленно интегрируются по частям; $x_k^{(i)}(t), i = 0, 1, \dots, n-2$, выражаются через $x_k^{(n-1)}(t)$ и $x_k(t_0), \dots, x_k^{(n-2)}(t_0)$; затем исследуются полученные для $y_k = x_k^{(n-1)}$ уравнения в $L_2[a,b]$.

Сказанное выше остается в силе, если L_2, W_2^{n-1} заменить на L_p, W_p^{n-1} с $p \geqslant 2$. Интересно, что значение $p = 2$ является критическим: как показывают примеры, сходимость первообразных в L_p при любом $p < 2$ может иметь место без того, чтобы решения сходились в $W_p^{n-1}[a,b]$ (или хотя бы в $C[a,b]$).

Еще дальше можно пойти, если отсутствует и член с $x^{(n-2)}$. Вообще, в связи с обобщенными уравнениями возникает ряд интересных вопросов (строение «воронки» в δ-некорректном случае и т. п.), обстоятельное рассмотрение которых потребовало бы, пожалуй, отдельной монографии.

Литература

1. *Левин, А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1973. — Вып. 5. — С. 105—132.
2. *Kurzweil, J.* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1957. — Vol. 7 (82), no. 3. — P. 418—449.
3. *Kurzweil, J.* Unicity of solutions of generalized differential equations / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1958. — Vol. 8, no. 4. — P. 502—509.
4. *Kurzweil, J.* Addition to my paper "Generalized ordinary differential equations and continuos dependence on a parameters" / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1959. — Vol. 9(83), no. 4. — P. 564—573.
5. *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 748 с.
6. *Reid, W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // *J. Differ. Equations*. — 1967. — Vol. 3, no. 3. — P. 423—439.
7. *Крейн, М. Г.* Об одном обобщении исследований Стилтьеса / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 881—884.
8. *Кац, И. С.* О поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка / И. С. Кац // *ДАН СССР*. — 1956. — Т. 106, № 2. — С. 183—186.
9. *Feller, W.* Generalized second order differential operators and their lateral conditions / W. Feller // *Illinois J. Math.* — 1957. — Vol. 1, no. 4. — P. 459—504.
10. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — Харьков: Изд. Харьковского матем. об-ва, 1892.
11. *Крейн, М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости / М. Г. Крейн // *ПММ*. — 1951. — Т. 15, вып. 3. — С. 323—348.
12. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
13. *Песин, И. Н.* Развитие понятия интеграла / И. Н. Песин. — М.: Наука, 1966. — 207 с.
14. *Гохман, Э. Х.* Интеграл Стильтьеса и его приложения / Э. Х. Гохман. — М.: Физматгиз, 1958. — 191 с.
15. *Мышкис, А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени /

А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко // *Матем. сб.* — 1967. — Т. 74(116), № 2. — С. 202–208.

16. *Потапов, В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций / В. П. Потапов // *Тр. Моск. матем. общ-ва.* — 1955. — Т. 4. — С. 125—236.
17. *Epheser, H.* Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung / H. Epheser // *Math. Z.* — 1955. — Vol. 61. — P. 435—454.
18. *Левин, А. Ю.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1963. — Т. 153, № 6. — С. 1257—1260.
19. *Левин, А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774—777.

10. Линейное оптимальное быстродействие и центрированные сечения [11]

1. Для простоты изложения ограничимся автономной задачей о линейном быстродействии в следующей простейшей форме: найти управление $u = u(t)$ такое, что $u(t) \in U$ при всех t, переводящее за минимальное время t_1 решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \; (\neq 0) \tag{1}$$

в начало координат: $x(t_1) = 0$. Здесь U — выпуклый многогранник в E^r, содержащий внутри себя нуль E^r; A и B — матрицы порядков $n \times n$ и $n \times r$ соответственно; $x(t)$ — n-мерная вектор-функция. Предполагается, что x_0 принадлежит области управляемости и что выполнено условие общности положения [1]. Как известно, это обеспечивает существование и единственность (с точностью до множества меры нуль) оптимального управления, которое в этих условиях однозначно определяется принципом максимума Л. С. Понтрягина.

Рассматриваемая задача относится к наиболее изучавшимся вопросам общей теории оптимального управления [1–4]; качественное исследование ее впервые провел Р. В. Гамкрелидзе [5]. Нас будет интересовать вычислительный аспект. Как известно, он связан с существенными трудностями, поскольку для сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -A^*\psi \tag{2}$$

априори неизвестно соответствующее начальное значение $\psi_0 = \psi(0)$. Для преодоления этой трудности предложены различные методы. Так, Н. Н. Красовский рекомендует (см. [3]) путем изменения целевой функции сводить задачу быстродействия к серии задач с фиксированным временем, варьирующимся от задачи к задаче. Такой подход имеет серьезные достоинства (минимальность требований к памяти, простота реализации); однако при этом на каждом этапе приходится решать задачу выпуклого программирования (к которой сводится соответствующая проблема моментов), т.е. каждый отдельный этап является многошаговым процессом — например, реализацией наискорейшего спуска. Как отмечается в [6], сведение к серии задач с фиксированным временем наиболее эффектно при невысоких требованиях к точности. Последнее в той или иной степени характерно для всех методов, основанных на использовании штрафных функций.

Конструкция, восходящая к Л. Нейштадту [7] (см. также [4]), связана, в частности, с многократным вычислением некоторого нелинейного оператора $N(p)$. Область определения N есть полупространство $D \in E^n$ таких

[11] Левин А. Ю. Линейное оптимальное быстродействие и центрированные сечения // Вестник Ярославского университета. — 1975. — Вып. 12. — С. 87—93.

векторов p, что $(p, x_0) < 0$. (Так как $N(\alpha p) = N(p)$ при всех $\alpha > 0$, можно говорить лишь о полусфере). Для произвольного $p \in D$ $N(p)$ определяется следующим образом. Пусть $\psi(t,p) = \exp(-A^* t)p$ — решение уравнения (2) с начальным условием $\psi(0) = p$, а $u = u(t,p)$ — управление, отвечающее $\psi(t,p)$ согласно принципу максимума Понтрягина. Уравнение

$$\left(x_0 + \int\limits_0^t e^{-As} Bu(s,p)\, ds,\ p\right) = 0 \tag{3}$$

относительно t имеет единственный корень $t = t(p)$. Оператор $N(p)$ дается формулой

$$N(p) = -x_0 - \int\limits_0^{t(p)} e^{-As} Bu(s,p) ds. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) с заданной точностью упрощается возрастанием левой части по t. Ясно, что $N(p)$ фактически находится одновременно с $t(p)$. Искомое начальное условие ψ_0 удовлетворяет уравнению $N(\psi_0) = 0$ и максимизирует $t(p)$ в D.

Л. Нейштадт рассматривает далее дифференциальное уравнение $\dfrac{dp}{d\tau} = N(p)$ $(p(0) \in D)$ и показывает, что предел (или предельная точка) при $\tau \to \infty$ решения $p(\tau)$ этого уравнения дает искомое значение ψ_0. (Здесь и далее мы говорим о ψ_0 как о векторе, единственном с точностью до положительного множителя, поскольку случай неединственности не связан с существенными дополнительными трудностями.) Численные методы решения уравнения Нейштадта исследованы Дж. Итоном и В. Г. Болтянским (см. [4]). Эта методика также основана на градиентном спуске (минимизирующем $-t(p)$).

2. Мы изложим другой метод, также связанный с вычислениями $N(p)$, но основанный не на градиентном спуске, а на алгоритме центрированных сечений (АЦС). Последний был предложен [8] (см. также [9–11]) для задач выпуклого программирования небольшой размерности и для задач выпуклого блочного программирования большой размерности с малым числом сквозных ограничений. АЦС основан на использовании следующего геометрического факта: если $M \subset E^n$ — выпуклое тело объема v, то любая $n-1$-мерная гиперплоскость, проходящая через центр тяжести M, рассекает M на части объема $\geqslant \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n v$. Для $n = 2$ это общеизвестно (см., например, [12]); по поводу общего случая см. [12, 13]. На каждом шаге АЦС многогранник, содержащий искомую точку экстремума, рассекается на две части гиперплоскостью, проходящей через центр тяжести, и одна из этих частей отбрасывается как заведомо не содержащая искомой точки. Характерной чертой АЦС является «геометрическая» скорость сходимости: решение задачи с точностью до ε требует $O(|\ln(\varepsilon)|)$ операций. На это основное обстоятельство не влияет ни возможность «сплющивания» многогранников (когда стремятся к нулю объемы, но не диаметры), ни возможность нарастания числа граней; по поводу нейтрализации обеих этих трудностей см. [8].

Возвращаясь к задаче быстродействия, заметим, что

$$(N(p), p) = 0, \quad (N(p), \psi_0) \geqslant 0 \ (p \in D). \tag{5}$$

Первое из этих соотношений сразу следует из определения $N(p)$, а второе вытекает из выпуклости множеств достижимости.

Соотношения (5) можно, очевидно, истолковать следующим образом: нахождение $N(p)$ для какой-либо точки $p \in D$ позволяет провести через p $n-1$-мерную гиперплоскость и определить, в каком из двух полупространств лежит ψ_0. Это и указывает на применимость АЦС. Поскольку нас интересует лишь направление ψ_0, истинная размерность задачи равна $n-1$. Для того, чтобы оказаться в условиях применимости АЦС (в частности, для получения исходного $n-1$-мерного многогранника) естественно действовать следующим образом.

Найдем n линейно независимых векторов $y_1, \ldots, y_n$, образующих с ψ_0 острый угол. Положим, например,

$$y_1 = -x_0, \quad y_i = N(p_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где $p_1, \ldots, p_{n-1}$ — какие-либо попарно неколлинеарные векторы на D (в том особом случае, когда векторы (6) линейно зависимы, нужны дополнительные вычисления). Определим векторы $v_1, \ldots, v_n$ из условия $(v_i, y_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Поскольку существенно лишь направление ψ_0, можно без ограничения общности положить

$$\begin{gathered} \psi_0 = v_1 + \alpha^1(v_2 - v_1) + \cdots + \alpha^{n-1}(v_n - v_1) \\ (\alpha^i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad \alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} \leqslant 1). \end{gathered} \tag{7}$$

Поиск ψ_0 сводится тем самым к поиску точки $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1})$ соответствующего симплекса M_0 пространства E^{n-1}.

Далее применяется АЦС по следующей схеме. Пусть после k-го шага точка α уже заключена в выпуклый многогранник $M_k \subset E^{n-1}$ $(k \geqslant 0)$. Определим центр тяжести $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ этого многогранника и находим $M(\xi^*)$, где

$$\xi^* = v_1 + \xi^1(v_2 - v_1) + \cdots + \xi^{n-1}(v_n - v_1).$$

Полагая в (5) $p = \xi^*$, получаем

$$c^1\alpha^1 + c^2\alpha^2 + \cdots + c^{n-1}\alpha^{n-1} \geqslant c^n, \tag{8}$$

где

$$c^i = (N(\xi^*), v_{i+1} - v_i), \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad c^n = -(N(\xi^*), v_1).$$

Так как гиперплоскость $c^1\alpha^1 + c^2\alpha^2 + \cdots + c^{n-1}\alpha^{n-1} = c^n$ проходит через ξ, то многогранник M_{k+1} ($\subset M_k$), определяемый неравенством (8) вместе с неравенствами, определяющими M_k, получается из M_k центрированным сечением. Поэтому

$$\operatorname{vol} M_r \leqslant (1 - e^{-1})^r \operatorname{vol} M_0, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Правая часть (9)) завышена по минимаксным соображениям: фактическая скорость убывания объемов ближе к $(0,5)^r \operatorname{vol} M_0$. Также и линейные размеры M_r убывают обычно со скоростью геометрической прогрессии, так что при небольшой размерности задачи для получения нормированного ψ_0 с точностью, скажем, до 10^{-4} достаточно нескольких десятков шагов. Отметим, что для достижения подобной точности в методах градиентного спуска зачастую требуются тысячи итераций (см., например, [14]).

3. Основным недостатком АЦС является необходимость работать с многогранниками (нахождение и запоминание вершин и граней, нахождение центра тяжести), что при больших размерностях влечет за собой трудности. Эта работа носит, однако, стандартный характер; например, в задаче блочного выпуклого программирования с $n-1$ сквозными ограничениями и задаче линейного быстродействия для системы n-го порядка может применяться одна и та же стандартная программа центрированных сечений (блоки, определяющие направление секущей плоскости, естественно, различны). Если же размерность невелика — например, при $n < 5$, — работа с многогранниками практически не ощутима.

Отметим также следующее. Как уже говорилось, при переходе к задачам с фиксированным временем требуется решать серию задач выпуклого программирования, каждую из них можно было бы также решать не градиентным спуском, а с помощью АЦС. Подчеркнем, что работа с многогранниками в предложенной выше схеме отвечает по трудоемкости не серии, а лишь одной задаче выпуклого программирования. Фактически в этой схеме АЦС применяется для минимизации функции $-t(p)$, которая, как можно показать, является квазивыпуклой (различие между выпуклыми и квазивыпуклыми функциями для АЦС несущественно).

Строго говоря, отыскание $N(p)$ для заданного p является многошаговой задачей, так как требует решения с заданной точностью скалярного уравнения (3) с монотонной левой частью; для этой цели может применяться, например, «половинение». Таким образом, при предложенной схеме, как и в схеме Нейштадта—Итона—Болтянского, решается одна многомерная задача, причем каждый шаг решения требует отыскания корня скалярного уравнения. При сведении проблемы быстродействия к серии задач с фиксированным временем, наоборот, имеется лишь одна одномерная задача отыскания корня; зато на каждом шаге ее решения возникает многомерная экстремальная задача. С точки зрения трудоемкости первый вариант представляется более привлекательным, хотя однозначные рецепты здесь вряд ли возможны.

4. Отметим в заключение, что существуют модификации АЦС, позволяющие не иметь дела с вершинами многогранников M_k. Эти модификации связаны с тем, что точки, через которые проводятся сечения, могут быть не слишком близкими к центрам тяжести. Например, если $(k-1)$-е сечение проводится через точку, выбранную наудачу равномерно по объему в M_k, то, как показано в [15] (для несколько упрощенной вероятностной модели), объемы M_k с вероятностью 1 убывают как $ce^{-0,5k}$, т.е. опять-таки со скоростью геометрической прогрессии.

Идея одной из возможных модификаций АЦС такова. Пусть на некотором шаге получен многогранник M_k, содержащий искомую точку. Генерируем точки $\tau_1, \tau_2, \ldots$, распределенные в M_k равномерно по объему, пока число их не достигнет заданного r. Центр тяжести ξ_k^1 системы точек $\tau_1, \ldots, \tau_r$ (т.е. точка с усредненными координатами) близок в вероятностном смысле к центру тяжести M_k. Очередное сечение проводим через ξ_k^1; пусть это сечение дает линейное неравенство l. Далее вместо того, чтобы искать вершины, а затем и центр тяжести нового многогранника M_{k+1}, отбираем среди точек $\tau_1, \ldots, \tau_r$ те, которые удовлетворяют неравенству l, и проводим очередное сечение через центр тяжести ξ_{k+1}^1 отобранных точек. Так поступаем до тех пор, пока запас точек τ_i не истощится; затем возобновляем его и т.д. При такой схеме единственным нетривиальным местом является генерирование псевдослучайных точек (ввиду быстрого убывания объемов M_k). Существуют различные приемы такого генерирования, на чем здесь подробнее не останавливаемся.

Литература

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с.
2. *Беллман, Р.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. — М.: ИЛ, 1962. — 336 с.
3. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

4. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
5. *Гамкрелидзе, Р. В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах / Р. В. Гамкрелидзе // *Изв. АН СССР, Сер. матем.* — 1958. — Т. 22, № 4. — С. 449—474.
6. *Моисеев, Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. — М.: Наука, 1975. — 528 с.
7. *Neustadt, L. W.* A synthesis method for optimal controls / L. W. Neustadt // Proc. of Optimum System Synthesis Conf. — Wright-Patterson AFB, Ohio, 11—13 September 1962. — P. 373—382.
8. *Левин, А. Ю.* Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1965. — Т. 160, № 6. — С. 1244—1247.
9. *Newman, D. J.* Location of the maximum on unimodal surfaces / D. J. Newman // *J. Assoc. Comput. Mach.* — 1965. — Vol. 12, no. 3. — P. 395—398.
10. *Уайльд, Д. Д.* Методы поиска экстремума / Д. Д. Уайльд. — М.: Наука, 1967. — 268 с.
11. *Кузовкин, А. И.* О количестве вычислений для нахождения минимума выпуклой функции / А. И. Кузовкин, В. М. Тихомиров // *Экономика и математические методы*. — 1967. — Т. 3, вып. 1. — С. 95—103.
12. *Яглом, А. М.* Выпуклые фигуры / А. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Серия Библиотека математического кружка, Вып. 4. — М.; Л.: ГТТИ, 1951. — 343 с.
13. *Митягин, Б. С.* Два неравенства для объемов выпуклых тел / Б. С. Митягин // *Матем. заметки*. — 1969. — Т. 5, № 1. — С. 99—106.
14. *Эрроу, К. Д.* Исследования по линейному и нелинейному программированию / К. Д. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. — Перев. с англ. изд. — М.: ИЛ, 1962. — 334 с.
15. *Левин, А. Ю.* Об одной схеме случайного поиска / А. Ю. Левин, А. С. Шварц // Труды семинара по функц. анализу. — Воронеж, 1963. — Вып. 7. — С. 67—69.
16. *Grünbaum, B.* Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes / B. Grünbaum // *Pacific J. Math.* — 1960. — Vol. 10. — P. 1257—1261.

11. Некоторые вопросы асимптотики для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений[12]

1. Рассмотрим на конечном промежутке $[a,b]$ системы с параметром ($0 \leqslant \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$)

$$\dot{X} = [A(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)]X, \quad X(a,\varepsilon) = I, \quad a \leqslant t \leqslant b; \tag{1}$$

$$\dot{Y} = A(t,\varepsilon)Y, \quad Y(a,\varepsilon) = I, \quad a \leqslant t \leqslant b; \tag{2}$$

здесь A, B, X, Y — квадратные матрицы-функции, причем $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon) \in \in L_1$ при всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$. Обозначение $L_p = L_p[a,b]$ часто будем использовать для случаев скалярных и матричных функций t, что не вызовет недоразумений. Через o_p (O_p) обозначаются $F(t,\varepsilon)$ такие, что норма их в L_p стремится к 0 (равномерно ограничена) при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1 (редукции). *Пусть для некоторого p, $2 \leqslant p \leqslant \infty$,*

$$B(t,\varepsilon) \to B(t,0) \quad \text{в} \quad L_{p/p-2}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Тогда пара соотношений

$$X(t,\varepsilon) \to X(t,0), \quad X^{-1}(t,\varepsilon) \to X^{-1}(t,0) \quad \text{в} \quad L_p, \quad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

эквивалентна паре соотношений

$$Y(t,\varepsilon) \to Y(t,0), \quad Y^{-1}(t,\varepsilon) \to Y^{-1}(t,0) \quad \text{в} \quad L_p, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Ввиду равноправности систем (1), (2) достаточно проверить импликацию (5) $\to$ (4). Пусть (5) выполнено. Полагая для краткости $F_\varepsilon = F(t,\varepsilon)$ и проводя замену

$$Z_\varepsilon = X_0^{-1} Y_0 Y_\varepsilon^{-1} X_\varepsilon, \tag{6}$$

получим после несложных выкладок для $Z_\varepsilon = Z(t,\varepsilon)$ уравнение

$$\dot{Z}_\varepsilon = M_\varepsilon Z_\varepsilon, \quad Z(a,\varepsilon) = I, \tag{7}$$

где

$$M_\varepsilon = X_0^{-1}(Y_0 Y_\varepsilon^{-1} B_\varepsilon Y_\varepsilon Y_0^{-1} - B_0)X_0. \tag{8}$$

Покажем, что в наших условиях (3), (5)

$$M_\varepsilon = o_1. \tag{9}$$

[12] Левин А. Ю. Некоторые вопросы асимптотики для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1975. — Т. 225, № 3. — С. 503—506. (Представлено академиком С.Л. Соболевым 30 VI 1975)

Действительно,

$$Y_0Y_\varepsilon^{-1}B_\varepsilon Y_\varepsilon Y_0^{-1} - B_0 = Y_0(Y_0^{-1} + o_p)B_\varepsilon(Y_0 + o_p)Y_0^{-1} - B_0 =$$
$$= (I + o_p)B_\varepsilon(I + o_p) - B_0 = (I + o_p)(B_0 + o_{p/p-2})(I + o_p) - B_0 =$$
$$= o_{p/p-1} + o_{p/p-2} + o_1 = o_1. \quad (10)$$

Мы воспользовались неравенством Гёльдера и конечностью промежутка. Из (10) вытекает (9). Далее, из (7) и (9), как известно, следует, что

$$Z_\varepsilon = I + o_\infty, \quad Z_\varepsilon^{-1} = I + o_\infty. \quad (11)$$

Наконец,

$$X_\varepsilon = Y_\varepsilon Y_0^{-1}X_0Z_\varepsilon = (I + o_p)X_0(I + o_\infty) = X_0 + o_p,$$

$$X_\varepsilon^{-1} = Z_\varepsilon^{-1}X_0^{-1}Y_0Y_\varepsilon^{-1} = (I + o_\infty)X_0^{-1}(I + o_p) = X_0^{-1} + o_p.$$

Теорема доказана. Для $p = \infty$ (когда речь фактически идет о сходимости решений в $C[a,b]$ и B, не зависящей от ε, аналогичный результат получен в [1] (некоторое расширение его на нелинейные задачи дано в [2]). Этот случай проще в том смысле, что не требуется привлекать X^{-1}, Y^{-1}, так как при $p = \infty$ вторые соотношения в (4),(5) вытекают из первых.

Остановимся на некоторых модификациях теоремы 1, при которых доказательство по существу не меняется. Во-первых, (3) можно заменить несколько более слабым (при $p < \infty$) требованием

$$B(t,\varepsilon) = O_{p/p-2}, \quad B(t,\varepsilon) \to B(t,0) \quad \text{в} \quad L_1.$$

Далее, можно рассматривать другие типы сходимости (промежуточные между сходимостью в L_2 и L_∞). Приведем один из вариантов. Пусть $\Omega \subset (a,b]$ — некоторое множество нулевой меры (возможно, пустое). *Если* $B(t,\varepsilon) \to$ $\to B(t,0)$ *в* L_1*, то выполнение соотношений*

$$X^{\pm 1}(t,\varepsilon) = O_\infty, \quad X(t,\varepsilon) \to X(t,0) \quad \textit{при всех} \;\; t \in [a,b] \setminus \Omega \quad (12)$$

эквивалентно выполнению соотношений

$$Y^{\pm 1}(t,\varepsilon) = O_\infty, \quad Y(t,\varepsilon) \to Y(t,0) \quad \textit{при всех} \;\; t \in [a,b] \setminus \Omega \quad (13)$$

Точечную сходимость в (12), (13) можно также заменить сходимостью в L_1, или, что в данном случае то же самое, сходимостью по мере.

Легко распространить теорему 1 на неоднородные уравнения, вводя фиктивные переменные. Наконец, так как конечномерность не использована, можно рассматривать (1), (2) как уравнения в банаховой алгебре с единицей.

2. Рассмотрим скалярное уравнение с параметром ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$)

$$x^{(n)} + p_1(t,\varepsilon)x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t,\varepsilon)x + p_n(t,\varepsilon) = 0, \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{14}$$

и коэффициентами из L_1. Пусть заданы некоторые начальные условия

$$x(a) = c_1, \quad \dot{x}(a) = c_2, \ldots, \quad x^{(n-1)}(a) = c_n. \tag{15}$$

Решение задачи (14), (15) обозначим через $x_\varepsilon(t)$. Для применения теоремы 1 перейдем к матричной форме; при этом, кроме $x^i = x^{(i-1)}(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, ввиду неоднородности введем еще фиктивную переменную $x^0 \equiv \mathrm{const}$. Соответствующее уравнение имеет вид (1), где

$$A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_n(t,\varepsilon) & -p_{n-1}(t,\varepsilon) & \ldots & -p_1(t,\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

а элементы $B = \|b_{ij}\|_1^{n+1}$ — нули, за исключением $b_{23} = b_{34} = \cdots = b_{n-1,n} = 1$. Решение уравнений (1), (2) с такими A, B обозначим, как и ранее, через $X(t,\varepsilon)$, $Y(t,\varepsilon)$. Теперь $Y(t,\varepsilon)$, $Y^{-1}(t,\varepsilon)$ легко находятся:

$$Y^{\pm1}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pm\int\limits_a^t p_n(s,\varepsilon)\,ds & \mp\int\limits_a^t p_{n-1}(s,\varepsilon)\,ds & \ldots & \mp\int\limits_a^t p_1(s,\varepsilon)\,ds & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где первые n строк $Y^{\pm1}$ совпадают с соответствующими строками 1. Теорема редукции позволяет получить для $p \geqslant 2$ критерий того, что

$$x(t,\varepsilon) \to x(t,0) \quad \text{в} \quad W_p^{n-1}[a,b], \quad \varepsilon \to 0, \tag{18}$$

при любых начальных условиях (15).

Лемма 1. *При любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,* (18) *эквивалентно сходимости $X(t,\varepsilon)$ к $X(t,0)$ в L_p.*

(Фиктивная переменная не вызывает, таким образом, осложнений.)

Лемма 2. *Для рассматриваемых $X(t,\varepsilon)$ оба соотношения* (4) *эквивалентны при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Пусть, например, $X_\varepsilon \to X_0$ в L_p. В данном случае это значит, что элементы матриц $X_\varepsilon = \|x_{ij}^\varepsilon\|_0^n$ имеют вид

$$x_{ij}^\varepsilon(t) = x_{ij}^0(t) + o_\infty, \quad x_{nj}^\varepsilon(t) = x_{nj}^0(t) + o_p, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{19}$$

Так как $\operatorname{tr}(A+B) \equiv 0$, то $X_\varepsilon^{-1} = \|z_{ij}^\varepsilon\|$ — матрицы, присоединенные к X_ε. Отсюда и из (19) вытекает, что разность $z_{ij}^\varepsilon - z_{ij}^0$ при всех i, j есть сумма произведений типа

$$o_p O_\infty \dots O_\infty \quad \text{или} \quad O_p o_\infty O_\infty \dots O_\infty,$$

т.е. представляет собой o_p.

Теорема 2. *При любом p, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, для* (18) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_a^t p_i(s,\varepsilon)ds \to \int\limits_a^t p_i(s,0)ds \quad \textit{в} \quad L_p, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \varepsilon \to 0. \tag{20}$$

Это утверждение не имеет места ни при каком $p < 2$.

Действительно, (18) эквивалентно соотношению $X_\varepsilon - X_0 = o_p$ (лемма 1), т.е. (4) (лемма 2), т.е. (5) (теорема редукции), т.е. (20), согласно (17). Последнее утверждение теоремы иллюстрируется примером:

$$p_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-3/2} \operatorname{sign} \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \varepsilon \neq 0;$$

$$p_i(t,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad |t| > \varepsilon \quad \text{или} \quad i > 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon = 0.$$

Здесь при любом $p < 2$ на $[a,b] = [-1,1]$ выполнено (20), но не (18): $x(t,\varepsilon)$ не сходятся к $x(t,0)$ даже в $C[a,b]$. Легко видеть, что в части, относящейся к достаточности, доказательство без изменения переносится на матричные (или абстрактные) уравнения вида (14). Отметим также, что можно обобщить теорему 2 на полные уравнения (с $x^{(n-1)}$), однако естественность формулировки при этом утрачивается.

3. Сказанное в п. 2 о классических уравнениях с суммируемыми коэффициентами, мотивирует переход к обобщенным уравнениям вида

$$x^{(n)} + \dot r_1(t)x^{(n-2)} + \dots + \dot r_{n-1}(t)x + \dot r_n(t) = 0, \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{21}$$

где $r_1, \dots, r_n$ — произвольные функции из L_2. Действительно, пусть $R \subset \subset (L_2)^n$ — подмножество абсолютно непрерывных вектор-функций $\rho(t) = = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, аннулирующихся при $t = a$ (точнее, элементами R являются соответствующие классы эквивалентности). Для каждого $\rho(t) \in \in R$ определена вектор-функция $\xi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in (W_2^{n-1})^{n+1}$, где $x_i(t)$ — решение соответствующего уравнения (21) с начальными условиями $x_i^{(k)}(a) = \delta_{i-1,k}$. Теорема 2 показывает, что отображение $\rho \to \xi$ есть гомеоморфизм R на некоторое множество $H \subset (W_2^{n-1})^{n+1}$. Нетрудно проверить, что непрерывность здесь равномерна на каждом шаре. Так как R плотно в $(L_2)^n$, этот гомеоморфизм однозначно продолжается на все $(L_2)^n$. Тем самым при любых $r_1, \dots, r_n$ из L_2 определены $x_0, \dots, x_n \big(\in W_2^{n-1} \big)$, а следовательно, и решение задачи (21)—(15).

Так как $x^{(n-1)}$ — обобщенная производная от $x^{(n-2)}$, то последнее из условий (15) не следует, вообще говоря, понимать буквально ($x^{(n-1)}(a)$ может отличаться от c_n или не существовать). Однако если a — точка Лебега для $r_1, \dots, r_n$, отвечающая значению $r_1(a) = \dots = r_n(a) = 0$, то все условия (15) выполняются. В общем случае можно интерпретировать $x^{(n-1)}(a)$ как $x^{(n-1)}(a-0)$, если продлить r_i, положив $r_1(t) = \dots = r_n(t) \equiv 0$ при $t < a$. Отметим еще, что добавление к r_i ненулевых констант меняет, вообще говоря, решение задачи (21), (15). (Уравнение (21) определяется заданием $r_1, \dots, r_n$, а не $\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n$).

Из сказанного ясно, что корректным был бы и следующий (на самом деле эквивалентный) способ определения решения задачи (21), (15), не связанный непосредственно с аппроксимацией классическими уравнениями. Припишем каждой r_i нулевое значение при $t = a$ и назовем решением задачи (21), (15), удовлетворяющее условиям $x(a) = c_1, \dots, x^{(n-2)}(a) = c_{n-1}$ решение интегродифференциального уравнения, получающегося из (21) формальным почленным интегрированием по частям (с учетом (15) и равенств $r_i(a) = 0$). Заменим, далее, $x, \dots, x^{(n-2)}$ их выражениями через $x^{(n-1)}$ и начальные условия, получим в конечном счете для $x^{(n-1)}$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром из $L_2([a,b]^2)$; поэтому решение этого уравнения в L_2 существует и единственно. Отметим, кстати, что с подобными преобразованиями (и дальнейшим предельным переходом для интегральных уравнений) связан другой способ доказательства достаточности в теореме 2; помимо общности матричного подхода редукция имеет то достоинство, что дает сразу необходимость и достаточность.

Различные формы обобщенных обыкновенных уравнений рассматривались многими авторами (см. например, [3–9]). С точки зрения «уровня обобщенности» эти трактовки соответствуют для уравнения (21) случаю, когда $r_i(t)$ имеют ограниченную вариацию либо непрерывны (с определенными ограничениями на модуль непрерывности). Есть основания полагать, что суммируемость с квадратом является здесь в определенном смысле пределом, т.е. что сходимость в соболевском пространстве W_2^{n-1} — наиболее широкий тип сходимости решений рассматриваемых уравнений, допускающий полную и эффективную «коэффициентную» характеристику.

4. В заключение приведем результат иного характера, относящийся к поведению при $t \to \infty$ решений возмущенного гармонического уравнения

$$\ddot{x} + [1 + \varepsilon(t)]x = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{22}$$

Теорема 3. *Пусть*

$$\int\limits_t^\infty \varepsilon(s) e^{\pm 2is}\, ds \in L_2[0, \infty), \tag{23}$$

причем величины $\operatorname{Im} \int\limits_\tau^t \varepsilon(s)\, ds$, $0 < \tau < t < \infty$ *полуограничены либо сверху, либо снизу.*

Тогда уравнение (22) *обладает решениями* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *вида*

$$x_{1,2}(t) \sim \mp i \dot{x}_{1,2}(t) \sim \exp\Big[\pm it \pm \frac{i}{2} \int\limits_0^t \varepsilon(s)\, ds\Big], \quad t \to \infty. \tag{24}$$

Основным объектом теоремы являются «быстро осциллирующие» возмущения $\varepsilon(t)$ (не исключается, в частности, случай $|\varepsilon(t)| \to \infty$). Теорема развивает результаты работ [4, 10]. В частности, У. Барбути [11] (см. также [12]) доказал устойчивость решений уравнения (22) при условии (23), предполагая (неявно) $\varepsilon(t)$ вещественным. Из (24) непосредственно усматривается как сам этот факт, так и то, что он не сохраняется для комплекснозначных $\varepsilon(t)$. Кстати, случай неограниченных решений доставляет наибольшие трудности при доказательстве.

Литература

1. *Левин, А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774—777.
2. *Strauss, A.* Linear perturbations of ordinary differential equations / A. Strauss, J. A. Yorke // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1970. — Vol. 26. — P. 255—260.
3. *Крейн, М. Г.* Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1951. — Т. 76, № 3. — С. 345—348.
4. *Feller, W.* On second order differential operators / W. Feller // *Ann. of Math.* — 1955. — Vol. 61, no. 1. — P. 90—-105.

5. *Kurzweil, J.* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1957. — Vol. 7 (82), no. 3. — P. 418—449.
6. *Kurzweil, J.* Addition to my paper "Generalized ordinary differential equations and continuos dependence on a parameters" / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1959. — Vol. 9(83), no. 4. — P. 564—573.
7. *Мышкис, А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени / А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко // *Матем. сб.* — 1967. — Т. 74(116), № 2. — С. 202–208.
8. *Reid, W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // *J. Differ. Equations*. — 1967. — Vol. 3, no. 3. — P. 423—439.
9. *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 748 с.
10. *Левин, А. Ю.* К теории уравнения $\ddot{x} + (1 + \varepsilon(t))x = 0$ (Заседания Московского математического общества) / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1967. — Т. 22, № 5(137). — С. 176—177.
11. *Barbuti, U.* Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(t)x = 0$ / U. Barbuti // *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* — 1952. — Vol. 12. — P. 170—175.
12. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

12. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака[13]. I

1. В первой части настоящей работы исследуются некоторые общие свойства интегральных операторов, не повышающих числа перемен знака. Эта проблематика восходит к известным исследованиям П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, Д. Пойа, О. Келлога, Ф. Р. Гантмахера, М. Г. Крейна, И. Шенберга. По поводу ее связей с вопросами механики и физики, с геометрическими задачами, марковскими процессами, сплайн-аппроксимацией и т. д. см. [1, 2]. Мы дадим лишь краткую характеристику круга вопросов, непосредственно затрагиваемых в работе.

Будем говорить лишь об интегральных операторах

$$\mathbf{K}x = (\mathbf{K}x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,d\sigma(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1.1}$$

оставляя в стороне соответствующие конечномерные аналоги. Ядро в (1.1) будем предполагать вещественным и непрерывным (последнее не очень существенно), функцию $\sigma(s)$ — неубывающей, $-\infty < \sigma(a) < \sigma(b) < \infty$. Оператор (1.1), таким образом, действует в $C[a,b]$.

Можно выделить три важных аспекта, взаимосвязи между которыми представляют основной интерес.

А. Неповышение числа перемен знака оператором (1.1) (к этому свойству часто добавляется связь между порядком чередования знаков $x(t)$ и $\mathbf{K}x(t)$, если число перемен знака у обеих этих функций совпадает).

В. Знакопостоянство определителей (так называемых миноров ядра)

$$K\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \det \|K(t_i,s_i)\|_1^n \qquad \left(a < \begin{matrix} t_1 < \dots < t_n \\ s_1 < \dots < s_n \end{matrix} < b\right) \tag{1.2}$$

С. Комплекс соответствующих спектральных свойств оператора $\mathbf{K}$: вещественность и простота собственных значений, число и перемежаемость нулей собственных функций, интерполяционные свойства собственных функций и т. д.

Возможны соотношения типа $\mathrm{A} \to \mathrm{B}, \mathrm{B} \to \mathrm{A}, \mathrm{A} \to \mathrm{C}, \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ при тех или иных предположениях. Наиболее подробно исследован случай симметричного положительно определенного ядра, который изучался О. Келлогом [3, 4], Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном [1] (матричная теория дана в

[13] Левин А. Ю., Степанов Г. Д. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака // Сибирский математический журнал. — 1976. — Т. 17, № 3. — С. 606—625.

[1] и для несимметричного случая). В то же время интересные результаты Ф. Р. Гантмахера [5] и М. Г. Крейна [6, 7], относящиеся к несамосопряженному случаю, насколько нам известно, подробно не излагались. С. Карлин в монографии [2] рассматривает связи между A и B и для несимметричных ядер, но там, где речь идет о приложениях к краевым задачам, ограничивается опять-таки самосопряженным случаем. В то же время ясно, что такое свойство, как вещественность спектра, представляет основной интерес именно в несамосопряженном случае.

Ряд исследований был посвящен не увеличивающим числа перемен знака преобразованиям типа свертки, т. е. операторам (1.1) с $K(t,s) = K(t - s)$, $a = -\infty$, $b = \infty$, $\sigma(t) = t$. Некоторые результаты окончательного характера получены здесь И. Шенбергом [8, 9]; см. также монографию И. И. Хиршмана и Д. В. Уиддера [10]. Мы далее всюду говорим лишь о конечном промежутке (хотя иногда это не имеет значения). Отметим, что применяемая для сверток методика широко использует преобразование Лапласа и неприменима для ядер общего вида.

Разнообразие формулировок существенно увеличивается за счет различных модификаций пунктов A, B, C. Так, в B знак миноров (1.2) может быть общим для всех n либо зависеть от n. Далее, можно говорить о строгом либо о нестрогом знакопостоянстве миноров (1.2); для приложений особый интерес представляют «компромиссные» варианты. Так, класс осцилляционных по Гантмахеру – Крейну ядер определяется следующим образом: $K(t,s) > 0 \quad (a < t, s < b)$, миноры (1.2) неотрицательны при всех n и строго положительны на «диагонали» $t_i = s_i$, $i = 1, \ldots, n$. О классах знакорегулярных и сильно знакорегулярных ядер будет идти речь ниже. Наконец, можно изучать следствия знакопостоянства миноров (1.2) не при всех n, а лишь при некоторых, скажем, при $n \leqslant n_0$ (хотя такое расщепление B часто логически оправдано, мы ниже не будем этим заниматься). Что касается A, то здесь, например, может варьироваться запас функций; далее, вместо числа перемен знака можно говорить о числе нулей функции (с тем или иным правилом подсчета) и т. п.

Из сказанного ясна множественность формулировок, характерная для этого круга вопросов. Изучение всех имеющихся здесь взаимосвязей не входит в нашу задачу. Основной целью первой части статьи является подготовка аппарата, реализующего импликацию A $\to$ C для класса ядер, включающего функции Грина двухточечных краевых задач.

Подобная ориентация оправдывается во второй части статьи, где для достаточно широкого класса краевых задач будет получен эффективный «коэффициентный» признак того, что интегральный оператор, обратный к данному дифференциальному, обладает свойством A. Подобные признаки, по-видимому, ранее известны не были.

Сочетание упомянутых фактов приводит в конечном счете к эффективным коэффициентным условиям, обеспечивающим наличие у двухточечной краевой задачи с распадающимися условиями (вообще говоря, несамосопряженной) комплекса спектральных свойств, характерных для классической задачи Штурма – Лиувилля.

С чисто качественной точки зрения эти результаты иллюстрируют телесность в L_1-норме множества коэффициентных вектор-функций $(p_1, \dots, p_n)$, обеспечивающих штурм-лиувиллевский комплекс свойств у краевой задачи с оператором

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x$$

и соответствующими краевыми условиями. Отметим, что множество ядер интегральных уравнений с аналогичным комплексом свойств не является телесным в естественных нормах. Таким образом, имеется принципиальная возможность эффективного использования численных методов для подтверждения штурм-лиувиллевского комплекса свойств тех или иных краевых задач (в отличие от уравнений Фредгольма общего вида). Этот важный вопрос заслуживает самостоятельного изучения.

На протяжении первой части работы мы неоднократно пользуемся фактами и конструкциями, содержащимися в классической монографии Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [1]. Нам обычно нужны будут обобщения этих фактов (в связи с расширением изучаемого класса ядер в нескольких направлениях); в тех случаях, когда эти обобщения по существу не связаны с изменением аргументации, читатель отсылается к [1].

2. Введем некоторые определения и обозначения. Все векторы, функции и ядра ниже предполагаются вещественными. Число перемен знака (вектора или функции) обозначается далее через S.

Подробнее, для вектора $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ число перемен знака

$$S[\xi] = S[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

определяется следующим образом. Пусть $\xi \neq 0$. Если все $x_i \leqslant 0$ или все $x_i \geqslant 0$, то $S[\xi] = 0$, в противном случае за $S[\xi]$ принимается максимальное из k, для которого существуют индексы $(1 \leqslant)\, i_0 < \ldots < i_k (\leqslant n)$ такие, что $x_{i_m} x_{i_{m+1}} < 0 \quad (m = 0, 1, \dots, k-1)$. Для $\xi = 0$ будет удобней считать, следуя С. Карлину [2], что $S[\xi] = -1$. Если x_m — первая ненулевая координата из $x_1, \dots, x_n$, то положим $\operatorname{sign}_1 \xi = \operatorname{sign} x_m$ (при $\xi = 0$ $\operatorname{sign}_1 \xi$ не определяется).

Отрезок $[a, b]$ считается далее фиксированным. Число перемен знака $S(f)$ измеримой функции $f(t)$ на $[a, b]$ определяется следующим образом. Если $f(t)$ эквивалентна нулю, то $S(f) = -1$. В противном случае положим $S(f) = s < \infty$, если существуют точки t_i $(a = t_0 < \ldots < t_{s+1} = b,$

$s \geqslant 0$) такие, что на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, s$, $f(t)$ не эквивалентна нулю и для некоторого $c \neq 0$ $c(-1)^k f(t) \geqslant 0$ почти всюду на $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, s$. В случае отсутствия подобных конечных наборов $\{t_i\}$ полагаем $S(f) = \infty$. Через $\operatorname{sign}_1 f$ обозначается величина $\operatorname{sign} c$. (Она определена, если $0 \leqslant S(f) < \infty$.)

Очевидно, что для $f \in C[a, b]$

$$S(f) = \sup S[f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)] \tag{2.1}$$

по всем возрастающим наборам $(a \leqslant) t_0 < \dots < t_k (\leqslant b)$, $k = 0, 1, \dots$ Через $S(f, J)$ при непрерывной f будем обозначать правую часть (2.1), где возрастающие наборы $\{t_i\}$ выбираются лишь из точек множества $J \subset [a, b]$.

Нулевым местом функции $f(t) \in C[a, b]$ называется компонента связности множества нулей $f(t)$. Нулевое место $[c, d] \subset (a, b)$ функции $f(t)$ называется узловым (пучным), если при малых $\varepsilon > 0$ $f(c - \varepsilon) f(d + \varepsilon) < 0$ (> 0).

Наряду с обозначениями (1.2) для ядер будет употребляться аналогичное обозначение для системы функций

$$f\begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ k_1 k_2 \dots k_n \end{pmatrix} = \det \|f_{k_i}(t_j)\|_1^n.$$

Для произвольного множества $J \subset [a, b]$ через $\Delta_n J$ обозначается множество n-мерных точек $(t_1, \dots, t_n)$ таких, что

$$t_i \in J, \quad i = 1, 2, \dots, n, \ t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Далее используется обозначение $\Delta_n = \Delta_n(a, b)$.

Пусть множество $J \subset [a, b], |\ J\ | \geqslant n$; здесь и далее $|\ J\ |$ $(\leqslant \infty)$ — количество элементов множества J. Следуя [1], будем говорить, что непрерывные $y_1(t), \dots, y_n(t)$ образуют систему Чебышева в $[a, b]$ относительно J, если всякая нетривиальная линейная комбинация этих функций имеет не более $n - 1$ перемен знака в $[a, b]$ и обращается в нуль не более чем в $n - 1$ точках из J. (При $J = [a, b]$ получаем обычную систему Чебышева.) Нам потребуется также другое, эквивалентное определение: $y_1(t), \dots, y_n(t)$ образуют систему Чебышева в $[a, b]$ относительно J, если определитель

$$y\begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ 1\ 2\ \dots\ n \end{pmatrix}$$

не меняет знака в $\Delta_n[a, b]$ и отличен от нуля в $\Delta_n J$. По поводу эквивалентности этих двух определений см. [1], с. 229. (Отметим, что формулировка соответствующей леммы 5 в [1] неточна: неравенства $x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n$ в определении I_σ должны быть заменены строгими и следует дополнительно оговорить линейную независимость φ либо неравенство $|\ I_\sigma\ | \geqslant n$.)

Последовательность (конечная или бесконечная) функций $y_1(t), y_2(t), \ldots$ называется [1] рядом Маркова в $[a,b]$ относительно J, если при каждом $n = 1, 2, \ldots$ функции $y_1, \ldots, y_n$ образуют систему Чебышева в $[a,b]$ относительно J.

Будем называть $(m \times n)$-матрицу знакорегулярной класса p $(p \leqslant \min\{m,n\})$, если при каждом $k \leqslant p$ все миноры k-го порядка имеют один и тот же (нестрогий) знак, зависящий лишь от k. В случае $p = \min\{m,n\}$ такая матрица называется знакорегулярной. Каждой такой матрице A сопоставляются числа $\varepsilon_i = \varepsilon_i(A)$, $i = 0, \ldots, p$ по следующему правилу: $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_i = 0$ для $i > \mathrm{rang}\ A$; при $0 < i \leqslant \mathrm{rang}\ A$ $\varepsilon_i = 1(-1)$, если миноры i-го порядка неотрицательны (неположительны).

Ядро $K(t,s)$, непрерывное в квадрате $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ (в дальнейшем непрерывность ядра обычно не оговаривается), называется знакорегулярным, если все отличные от нуля определители (1.2) имеют при каждом n один и тот же знак, зависящий лишь от n. Следуя общепринятой терминологии, миноры ядра (1.2), рассматриваемые как функции, будем называть ассоциированными ядрами; они далее обозначаются через

$$K^{(n)} = K^{(n)}(T,S) \quad \bigl(T = (t_1, \ldots, t_n),\ S = (s_1, \ldots, s_n);\ T,\ S \in \Delta_n[a,b]\bigr).$$

Знакорегулярному ядру $K = K(t,s)$ сопоставим последовательность чисел $\varepsilon_i = \varepsilon_i(K)$, $i = 0, 1, \ldots$, по следующему правилу: $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_i = 0$, если все миноры i-го порядка равны нулю; $\varepsilon_i = 1$ $(\varepsilon_i = -1)$, если среди миноров i-го порядка есть положительные (отрицательные). Если K не вырождено, то все $\varepsilon_i(K)$ очевидно отличны от нуля. В любом случае справедливы неравенства

$$\varepsilon_i K^{(i)}(T,S) \geqslant 0 \quad (T, S \in \Delta_i). \tag{2.2}$$

Ядро $K(t,s)$ называется строго знакорегулярным, если неравенства (2.2) при всех i являются строгими.

Для дальнейшего особый интерес представляет некоторый класс, промежуточный между классами знакорегулярных и строго знакорегулярных ядер. Пусть I_1, I_2 — какие-либо из промежутков $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b). Знакорегулярное ядро $K(t,s)$ назовем сильно знакорегулярным в $I_1 \times I_2$, если выполнены следующие два условия.

1°. $K(t,s) \neq 0$ в $I_1 \times I_2$ за исключением, может быть, вершин квадрата $[a,b]^2$.

2°. $K^{(i)}(T,T) \neq 0$ при всех $T \in \Delta_i$, $i = 2, 3, \ldots$

Класс сильно знакорегулярных ядер можно рассматривать как обобщение класса осцилляционных ядер, исследованного Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном [1]. (Осцилляционным ядрам соответствует случай, когда все $\varepsilon_i(K)$ равны 1 и $I_1 = I_2$.)

3. В этом пункте излагаются необходимые для дальнейшего матричные факты.

Лемма 1. *Пусть в знакорегулярной* $(m \times n)$*-матрице* $A = \|a_{ij}\|$ *линейно-зависимы строки с номерами* $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_p = m$. *Если при этом линейно-независимы как строки с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}$, *так и строки с номерами* $i_k, i_{k+1}, \ldots, i_p$ *для некоторого* k $(2 \leqslant k \leqslant p)$, *то при любом* $i > i_{k-1}$ i*-я строка есть линейная комбинация строк с номерами* $i_1, \ldots, i_{p-1}$.

Доказательство. Требует рассмотрения лишь случай $p \leqslant n$, $i \neq i_k$, $i_{k+1}, \ldots, i_p$. Из условий леммы вытекает, что i_p-я строка есть линейная комбинация i_1-й, $\ldots, i_{p-1}$-й строк

$$a_{i_p j} = \lambda_1 a_{i_1 j} + \lambda_2 a_{i_2 j} + \ldots + \lambda_{p-1} a_{i_{p-1} j}. \tag{3.1}$$

При этом среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ имеется хотя бы один ненулевой коэффициент $\lambda_r \neq 0$, так как иначе из (3.1) вытекала бы линейная зависимость строк с номерами $i_k, i_{k+1}, \ldots, i_p$.

Пусть $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ — произвольная система индексов, а индексы $i_1^0 < j_2^0 < \ldots < j_{p-1}^0$ выбраны так, чтобы

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_{p-1} \\ j_1^0 & j_2^0 & \ldots & j_{p-1}^0 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{3.2}$$

Учитывая (3.1) и неравенство $i > i_{k-1} \geqslant i_r$, находим

$$A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_p \\ j_1^0 \ldots\ldots\ldots\ldots j_{p-1}^0 \end{pmatrix} = \\ = \lambda_r (-1)^{p-r-1} A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{r-1} i_r i_{r+1} \ldots i_{p-1} \\ j_1^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots j_{p-1}^0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i \ldots i_p \\ j_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots j_p \end{pmatrix} = \\ = \lambda_r (-1)^{p-r} A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{r-1} i_r i_{r+1} \ldots i \ldots i_{p-1} \\ j_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots j_p \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

(В (3.4) подразумевалось, что $i_{r+1} < i < i_{p-1}$; если $i < i_{r+1}$ или $i > i_{p-1}$, то запись меняется очевидным образом.) Соотношения (3.2), (3.3) с учетом знакорегулярности A дают $\lambda_r(-1)^{p-r} < 0$. Сопоставляя это неравенство с (3.4), заключаем, что при любых $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$

$$A \begin{pmatrix} i_1 \ldots i \ldots i_{p-1} \\ j_1 \ldots\ldots\ldots j_p \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Если строки с номерами $1 = i_1 < \ldots < i_p = m$ знакорегулярной $(m \times n)$-матрицы A линейно-зависимы, в то время как первые $p-1$ и последние $p-1$ из них линейно-независимы, то ранг A равен $p-1$.*

Это непосредственно вытекает из леммы 1 при $k = 2$.

Лемма 2. *Пусть некоторый минор*

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ j_1 j_2 \ldots j_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_p = m \\ 1 = j_1 < j_2 < \ldots < j_p = n \end{pmatrix}$$

знакорегулярной $(m \times n)$-матрицы A равен нулю. Если при этом

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_{p-1} \\ j_1 j_2 \ldots j_{p-1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_2 i_3 \ldots i_p \\ j_2 j_3 \ldots < j_p \end{pmatrix} \neq 0,$$

то ранг A равен $p-1$.

Доказательство сводится к двукратному применению следствия — сначала к $(m \times p)$-матрице, составленной из столбцов матрицы A с номерами $j_1, \ldots, j_p$, а затем к транспонированной матрице A^*.

Для вполне неотрицательных матриц (т. е. для матриц с неотрицательными минорами) утверждения, аналогичные следствию 1 и лемме 2, доказаны в [1].

Теорема 1 (Моцкин). *Для того чтобы линейное преобразование, $R^m \to$ $\to R^n$ с матрицей $A = \|a_{ij}\|$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ ранга r обладало свойством*

$$S[A\xi] \leqslant S[\xi] \text{ для всех } \xi \in R^m,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) матрица A является знакорегулярной класса $r-1$;

2) для любых возрастающих наборов индексов

$$1 \leqslant \begin{matrix} i_1 < \ldots < i_r \\ i'_1 < \ldots < i'_r \end{matrix} \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant m$$

справедливо неравенство

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_r \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i'_1 i'_2 \ldots i'_r \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в монографии [10]. В случае $m = r$ формулировка очевидно упрощается и переходит в теорему Шенберга ([11], см. также [1]).

Лемма 3. *Пусть A — знакорегулярная матрица и*

$$S[A\xi] = S[\xi] = p \ (\geqslant 0)$$

для некоторого ξ. Тогда

$$\operatorname{sign}_1 A\xi \operatorname{sign}_1 \xi = \varepsilon_p(A)\varepsilon_{p+1}(A).$$

Для случая, когда все $\varepsilon_i = 1$, аналогичное утверждение доказано Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном [1], с. 300—302; их доказательство распространено на произвольные ε_i С. Карлином [2], с. 223. Отметим, что соответствующие теоремы в [1, 2] содержат дополнительные требования на ранг и размеры A; эти требования можно опустить [12].

4. Переходим к интегральным операторам, не повышающим числа перемен знака. Остановимся вначале на возможности варьирования запаса функций, рассматриваемого в качестве области действия оператора. Наряду с классами $C[a,b], L_1[a,b]$ могут рассматриваться также классы гладких функций, например класс $A[a,b]$ аналитических на $[a,b]$ функций. Существенным для дальнейшего является класс $\delta[a,b]$ линейных комбинаций дельта-функций, т. е. обобщенных функций вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i\delta(t-s_i) \quad (a < s_1 < \ldots < s_m < b, \quad m = 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

при этом, конечно, полагаем $S(x) = S[c_1, \ldots, c_n]$, $\operatorname{sign}_1 x = \operatorname{sign}_1(c_1, \ldots, c_n)$. Все перечисленные функции являются производными (в обобщенном смысле) от функций ограниченной вариации на $[a,b]$; легко видеть, что оператор

$$(\mathbf{K}x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \tag{4.2}$$

преобразует их в функции из $C[a,b]$.

В действительности свойство неповышения числа перемен знака не зависит от выбора какого-либо из упомянутых классов, т. е. является внутренним свойством ядра $K(t,s)$. Это видно из следующих соображений.

Пусть M_1, M_2 — любые два из упомянутых классов функций. Всякую функцию $x \in M_2$ можно аппроксимировать функциями $x_n \in M_1$, чтобы выполнялось условие

$$(\mathbf{K}x_n)(t) \to (\mathbf{K}x)(t) \text{ при всех } t \in [a,b] \quad (n \to \infty), \tag{4.3}$$

$$S(x_n) = S(x) \quad (n \geqslant n_0), \tag{4.4}$$

$$\operatorname{sign}_1 x_n = \operatorname{sign}_1 x \quad (0 \leqslant S(x) < \infty, n \geqslant n_0). \tag{4.5}$$

Возможность такой аппроксимации (к чему мы вернемся ниже) показывает, в частности, что соотношение

$$S(\mathbf{K}x) \leqslant S(x) \text{ для всех } x \in M_1$$

влечет за собой аналогичное соотношение для всех $x \in M_2$. В самом деле, пусть $x \in M_2$ и $\{x_n\}$ — последовательность функций из M_1, удовлетворяющая условиям (4.3), (4.4). Учитывая полунепрерывность снизу функционала $S(x)$ относительно точечной сходимости, имеем

$$S(\mathbf{K}\mathrm{x}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} S(\mathbf{K}x_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} S(x_n) = S(x),$$

что и требовалось доказать.

Чтобы убедиться в несущественности выбора класса, достаточно проверить аппроксимации «$M_1 \to M_2$» типа (4.3) – (4.5) по кругу

$$L_1[a,b] \to C[a,b] \to A[a,b] \to \delta[a,b] \to L_1[a,b].$$

Аппроксимации $L_1 \to C$ и $C \to A$ тривиальны. Переходя к $A \to \delta$, будем аппроксимировать произвольную функцию $x \in \delta[a,b]$ вида (4.1) целыми функциями

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(t-t_i)^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как отвечающие x_n линейные функционалы в $C[a,b]$ при $n \to \infty$ слабо сходятся к функционалу, отвечающему x, то условие (4.3) выполняется. Далее, $h_i(t) = e^{k(t-t_i)^2}$ $(t_1 < t_2 < \ldots)$, как известно, образуют декартовскую систему функций [13, 14], поэтому число нулей $x_n(t)$ на всей прямой, а тем более $S(x_n)$, не превосходит $S(x)$ при каждом n. Тот факт, что $S(x_n) \geqslant S(x)$ при больших n, как и соотношение (4.5), вполне очевидны.

Наконец, при аппроксимации $\delta \to L_1$ функцию $x(t) \in L_1[a,b]$ можно приближать функциями

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{a+(i-1)h}^{a+ih} x(s)\,ds \right) \delta\left(t - a - \frac{2i-1}{2}h\right) \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right).$$

Выполнение условий (4.3) –(4.5) проверяется без труда.

Таким образом, доказана

Лемма 4. *Если оператор* (4.2) *не повышает числа перемен знака на каком-либо из классов* $A[a,b], C[a,b], L_1[a,b], \delta[a,b]$*, то это же верно и для трех других классов.*

Число классов здесь можно было бы увеличить, на чем подробнее не останавливаемся.

5. В данном пункте рассматривается связь между знакорегулярностью ядра $K(t,s)$ и «знаковыми» свойствами интегрального оператора, т.е. в терминологии п. 1, между аспектами A и B. Ядро, как и обычно, предполагается непрерывным.

Теорема 2. *Пусть M – какой-либо из классов $A[a,b], C[a,b], L_1[a,b], \delta[a,b]$.*

а) Для того, чтобы преобразование (4.2) *с невырожденным ядром $K(t,s)$ обладало свойством*

$$S(\mathbf{K}x) \leqslant S(x) \text{ для всех } x \in M, \tag{5.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы $K(t,s)$ было знакорегулярным ядром.

б) Если $K(t,s)$ знакорегулярно и

$$S(\mathbf{K}x) = S(x) = p \quad (0 \leqslant p < \infty) \tag{5.2}$$

для некоторого $x \in M$, то

$$\operatorname{sign}_1 x \ \operatorname{sign}_1 \mathbf{K}x = \varepsilon_p(K)\varepsilon_{p+1}(K). \tag{5.3}$$

Утверждения а) и б) являются очевидно бесконечномерными аналогами теоремы Шенберга и леммы 3 соответственно. Родственные теореме 2 факты (при других предположениях) имеются в монографиях ([1, 2]).

В силу леммы 4 можно ограничиться случаем $M = \delta[a,b]$. Пусть $K(t,s)$ знакорегулярно и $x \in \delta[a,b]$ имеет вид (4.1). Тогда

$$y(t) = (\mathbf{K}x)(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j K(t, s_j) \tag{5.4}$$

и для любого возможного набора $(a \leqslant)\, t_1 < \ldots < t_r\, (\leqslant b)$ в силу теоремы Моцкина имеет место неравенство

$$S[y(t_1), \ldots, y(t_r)] = S[Ac] \leqslant S[c] = S(x),$$

где $A = \|K(t_j, s_j)\|$ — знакорегулярная $(r \times m)$-матрица, $c = (c_1, \ldots, c_m)^T$. Ввиду произвольности $\{t_i\}$ получаем $S(y) \leqslant S(x)$, что дает достаточность. Отметим, что невырожденность ядра здесь не использовалась.

Для доказательства необходимости рассмотрим матрицу вида

$$A = \|K(t_i, s_j)\| \qquad \left(a < \begin{matrix} t_1 < \ldots < t_m \\ s_1 < \ldots < s_m \end{matrix} < b\right), \tag{5.5}$$

ранг которой обозначим через r $(\leqslant m)$. Так как $S(\mathbf{K}x) \leqslant S(x)$, в частности, для всех функций вида (4.1) (при фиксированных $s_1, \ldots, s_m$), то

$S[Ac] \leqslant S[c]$ для любого $c = (c_1, \ldots, c_m)^T$. Поэтому, согласно теореме Моцкина, A является матрицей знакорегулярной класса $r - 1$. Пусть даны два произвольных минора ядра порядка p. Ввиду невырожденности ядра, очевидно, можно построить матрицу (5.5) ранга не меньше $p+1$ и содержащую среди своих миноров оба данных минора ядра. Поскольку A знакорегулярна класса $r-1$, то эти миноры должны иметь один и тот же (нестрогий) знак. Так как миноры выбирались произвольно, то знакорегулярность $K(t, s)$ доказана.

Переходим к б). Рассмотрим вначале случай $M = \delta[a, b]$. Пусть $x(t) \in \in \delta[a, b]$ имеет вид (4.1) и удовлетворяет (5.2). Тогда для функции $y = \mathbf{K}x$, имеющей вид (5.4), можно выбрать $t_1 < t_2 < \ldots < t_{p+1}$ в $[a, b]$ так, чтобы

$$S(y) = S[y(t_l), \ldots, y(t_{p+1})] = p = S(x) = S(c_1, \ldots, c_m). \tag{5.6}$$

Поскольку $[(p+1) \times m]$-матрица $A = \|K(t_i, s_j)\|$ знакорегулярна и

$$(y(t_1), \ldots, y(t_{p+1}))^T = Ac, \ c = (c_1, \ldots, c_m)^T,$$

то из (5.6) в силу леммы 3 следует, что

$$\operatorname{sign}_1 c \cdot \operatorname{sign} y(t_1) = \varepsilon_p(A)\varepsilon_{p+1}(A).$$

Так как оба сомножителя в правой части отличны от нуля и $\operatorname{sign}_1 c = = \operatorname{sign}_1 x$, $\operatorname{sign} y(t_1) = \operatorname{sign}_1 \mathbf{K}x$, то последнее равенство эквивалентно (5.3).

Пусть теперь класс M отличен от $\delta[a, b]$ (самостоятельный интерес здесь представляет лишь $M = L_1$). Функцию $x \in M$, для которой выполнено (5.2), аппроксимируем функциями $x_n \in \delta[a, b]$ так, чтобы выполнялись соотношения (4.3) – (4.5). Учитывая утверждение а) и полунепрерывность снизу $S(x)$, имеем при больших n

$$p = S(\mathbf{K}x) \leqslant S(\mathbf{K}x_n) \leqslant S(x_n) = S(x) = p \quad (n \geqslant n_0),$$

т. е.

$$S(\mathbf{K}x_n) = S(x_n) = p \quad (n \geqslant n_0). \tag{5.7}$$

Отсюда и из (4.3) следует, что $\operatorname{sign}_1 \mathbf{K}x_n = \operatorname{sign}_1 \mathbf{K}x$ $(n \geqslant n_0)$. Так как $x_n \in \delta[a, b]$, то по доказанному выше с учетом (4.5), (5.7)

$$\varepsilon_p(K)\varepsilon_{p+1}(K) = \operatorname{sign}_1 x_n \operatorname{sign}_1 \mathbf{K}x_n = \operatorname{sign}_1 x \operatorname{sign}_1 \mathbf{K}x \quad (n \geqslant n_0).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. *При $M = C[a, b]$ достаточность в а) сохраняется и для операторов более общего вида* (1.1). *Подробнее, если $K(t, s)$ знакорегулярно и I_σ — множество точек роста $\sigma(t)$ в $[a, b]$, то*

$$S(\mathbf{K}x) \leqslant S(x, I_\sigma) \ \text{\textit{для всех}} \ x(t) \in C[a, b].$$

Так как поведение $x(t)$ вне I_σ не влияет на $\mathbf{K}x$, то это утверждение легко получить из теоремы 2 а), если аппроксимировать $\sigma(t)$ гладкими неубывающими функциями и воспользоваться тем, что множество линейных операторов, действующих в $C[a,b]$ и не повышающих числа перемен знака, замкнуто в слабой операторной топологии. Другой способ доказательства дан в [1], с. 236.

6. Выше изучались связи между аспектами A и B (см. п. 1). Прежде чем переходить к соотношениям типа B $\to$ C, мы должны будем остановиться на некоторых известных фактах. Данный пункт посвящается классическому результату И. Шура [15].

Рассмотрим интегральные уравнения

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,d\sigma(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{6.1}$$

$$x(t_1,\ldots,t_n) = \mu \int\limits_{\triangle_n[a,b]} K\begin{pmatrix} t_1\ldots t_n \\ s_1\ldots s_n\end{pmatrix} x(s_1,\ldots,s_n)\,d\sigma(s_1)\ldots d\sigma(s_n)$$

$$(a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant b). \tag{6.2}$$

Здесь $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$. Интеграл в правой части (6.2) можно понимать как интеграл Лебега – Стилтьеса по мере в R^n, индуцированной функцией $\sigma(t)$, либо как повторный интеграл Римана – Стилтьеса (существование которого и независимость от порядка интегрирования обеспечиваются обращением в нуль подынтегральной функции при совпадении каких-либо из величин $s_1,\ldots,s_n$).

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ — характеристические значения уравнения (6.1), занумерованные с учетом кратностей (как корней знаменателя Фредгольма).

Теорема 3 (И. Шур). *Совокупность характеристических значений уравнения* (6.2) *совпадает с совокупностью произведений*

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n} \quad (i_1 < i_2 < \ldots i_n). \tag{6.3}$$

При этом кратность характеристического значения μ совпадает с числом различных произведений (6.3)*, равных μ.*

Если $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}$ — линейно-независимые собственные функции уравнения (6.1)*, отвечающие характеристическим значениям $\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,$ λ_{i_n} соответственно, то*

$$x\begin{pmatrix} t_1 t_2 \;\ldots\; t_n \\ i_1 i_2 \;\ldots\; i_n\end{pmatrix} \tag{6.4}$$

есть собственная функция уравнения (6.2)*, отвечающая характеристическому значению* $\mu = \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}$.

Фактически в [15] рассматривался случай $\sigma(t) = t$ и интегрирование велось не по симплексу, а по кубу. Переход к мере $\sigma(t)$ не влияет на доказательство. Интуитивно почти очевиден и тот факт, что уравнение

$$x(t_1,\ldots,t_n) = \frac{\mu}{n!}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1\ldots t_n \\ s_1\ldots s_n\end{pmatrix} x(s_1,\ldots,s_n)\,d\sigma(s_1)\ldots d\sigma(s_n)$$

$$(a \leqslant t_1,\ldots,t_n \leqslant b) \quad (6.5)$$

имеет те же и той же кратности характеристические значения, что и (6.2). Для проверки можно, например, убедиться, в равенстве соответствующих знаменателей Фредгольма или, что то же, в равенстве их логарифмических производных. Последние, как известно, даются (при малых $|\lambda|$) рядами, коэффициентами которых служат следы соответствующих итерированных ядер. Достаточно поэтому проверить, что интеграл

$$\int\ldots\int K\begin{pmatrix} s_1^1\ldots s_n^1 \\ s_1^2\ldots s_n^2\end{pmatrix} K\begin{pmatrix} s_1^2\ldots s_n^2 \\ s_1^3\ldots s_n^3\end{pmatrix}\ldots K\begin{pmatrix} s_1^m\ldots s_n^m \\ s_1^1\ldots s_n^1\end{pmatrix} d\sigma(s_1^1)\ldots d\sigma(s_n^m),$$

взятый по $[a,b]^n \times \ldots \times [a,b]^n$, равен умноженному на $(n!)^m$ интегралу от той же функции по $\Delta_n[a,b] \times \ldots \times \Delta_n[a,b]$. Это сразу следует из того, что подынтегральная функция симметрична как функция $s_l^r,\ldots,s_n^r$ при любом r и, кроме того, аннулируется на поверхностях вида $s_i^r = s_j^r$.

С абстрактной точки зрения теорема Шура характеризует спектр внешней степени линейного вполне непрерывного (в данном случае интегрального) оператора. Отметим, что операторы в правых частях (6.2) и (6.5) рассматриваются не на внешней и тензорной n-й степенях $C[a,b]$, а на совокупности любых непрерывных функций n переменных. Теорема показывает, в частности, что подобное расширение области определения не порождает новых характеристических значений (как известно, этому расширению соответствует пополнение по некоторой кросс-норме [16]).

7. Данный пункт посвящен некоторой модификации одного известного факта «конусного» характера.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(P) = \lambda\int\limits_\Omega K(P,Q)\varphi(Q)\,d\sigma(Q) \quad (P \in \Omega), \tag{7.1}$$

где Ω — ограниченное множество в $E^n, K(P,Q)$ ограничено и непрерывно в $\Omega\times\Omega$, σ — неотрицательная мера Лебега – Стилтьеса, причем $0 < \sigma(\Omega) <$ $< \infty$.

Пусть Ω_σ — множество точек $P \in \Omega$ таких, что пересечение Ω со всякой окрестностью P имеет положительную σ-меру. Обозначим далее через Ω_1 (Ω_2) совокупность всех $P(Q)$ из Ω таких, что $K(P,Q) > 0$ для некоторого $Q \in \Omega$ (для некоторого $P \in \Omega$). Положим, наконец, $\Omega^* = \Omega_\sigma \Omega_1 \Omega_2$ (здесь и далее знак пересечения $\bigcap$ опускается).

Лемма 5. *Пусть $\sigma(\Omega^*) > 0$, $K(P,Q) \geqslant 0$ в $\Omega \times \Omega$, $K(P,Q) > 0$ в $\Omega^* \times \Omega^*$. Тогда уравнение* (7.1) *обладает положительным простым характеристическим значением λ_1, меньшим модуля любого другого характеристического значения. Отвечающая λ_1 собственная функция $\varphi_1(P)$ неотрицательна в Ω (с точностью до постоянного множителя); $\varphi_1(P) > 0$ при тех и только тех P, для которых существует $Q \in \Omega^*$ такое, что $K(P,Q) > 0$ (в частности, $\varphi_1(P) > 0$ в Ω^*).*

Для случая, когда $K(P,Q) > 0$ в $\Omega \times \Omega$, это эквивалентно известной теореме Ентча [17] (см. также ([18], [19])). Случай $\Omega^* \neq \Omega$ также удается свести к этой теореме. Действительно, для любой непрерывной в Ω функции ψ такой, что

$$\psi(P) = 0 \ \text{ при всех } \ P \in \Omega \setminus \Omega_1, \tag{7.2}$$

как легко видеть, имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} K(P,Q)\psi(Q)\, d\sigma(Q) = \int\limits_{\Omega^*} K(P,Q)\psi(Q)\, d\sigma(Q) \quad (P \in \Omega). \tag{7.3}$$

Условие (7.2) выполнено, в частности, для всех собственных и присоединенных функций уравнения (7.1), поскольку они принадлежат области значения интегрального оператора с ядром $K(P,Q)$. Поэтому сужение на Ω^* всякой такой функции будет соответственно собственной или присоединенной функцией уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int\limits_{\Omega^*} K(P,Q)\varphi(Q)\, d\sigma(Q) \quad (P \in \Omega^*), \tag{7.4}$$

отвечающей тому же λ. Обратно, если $\varphi(P)$ является, например, собственной функцией для (7.4), то продолжение ее с Ω^* на Ω равенством

$$\varphi(P) = \lambda \int\limits_{\Omega^*} K(P,Q)\varphi(Q)\, d\sigma(Q) \quad (P \in \Omega) \tag{7.5}$$

дает собственную функцию для (7.1) с тем же λ. Согласно теореме Ентча, (7.4), а следовательно, и (7.1) обладают строго наименьшим по модулю характеристическим значением $\lambda_1 > 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1(P)$, положительная в Ω^*. Поведение φ_1 как собственной функции для (7.1) в $\Omega \setminus \Omega_1$ определяется соотношением (7.5) (при $\varphi = \varphi_1, \lambda = \lambda_1$). Это соотношение (с учетом очевидных соображений непрерывности) показывает, что $\varphi(P) = 0$ или $\varphi(P) > 0$ в зависимости от того, выполняется или нет для данного P тождество $K(P, Q) \equiv 0$, когда Q пробегает Q^*.

Замечание 2. *Соотношение* (7.3)*, справедливое для всех собственных функций* (7.1)*, не зависит от того, выполнены ли условия леммы 5. Поэтому, какова бы ни была собственная функция φ любого непрерывного ядра $K(P, Q), \varphi(P_0) = 0$ при всяком $P_0 \in \Omega$ таком, что* $\mathrm{K}(P_0, Q) \equiv 0$ *в Ω^*.*

8. В этом пункте распространим некоторые результаты Гантмахера – Крейна, относящиеся к осцилляционным ядрам, на сильно знакорегулярные ядра.

Лемма 6. *Если ядро $K(t, s)$ сильно знакорегулярно в $I_1 \times I_2$, то*

$$\varepsilon_n K \begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} > 0$$

для любого $n \geqslant 2$ и любых t_i, s_i таких, что

$$t_i \in I_1,\ s_i \in I_2 \quad (i = 1, \dots, n); \qquad \begin{matrix} t_1 \\ s_1 \end{matrix} < \begin{matrix} t_2 \\ s_2 \end{matrix} < \dots < \begin{matrix} t_n \\ s_n \end{matrix}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Предположим противное: пусть при некотором $n \geqslant 2$ существуют $\{t_i\}, \{s_i\}$, удовлетворяющие условию (8.1), для которых

$$K \begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} = 0. \tag{8.2}$$

Покажем, что тогда

$$K \begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_{n-1} \\ s_1 s_2 \dots s_{n-1} \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} t_2 t_3 \dots t_n \\ s_2 s_3 \dots s_n \end{pmatrix} = 0. \tag{8.3}$$

Выберем $c_1, c_2, \dots, c_n$ такие, что

$$\max\{t_1, s_1\} < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \min\{t_2, s_2\},$$

и положим для удобства записи

$$t'_1 = t_1,\ t'_2 = c_1, \dots, t'_{n+1} = c_n,\ t'_{n+2} = t_2, \dots, t'_{2n} = t_n,$$

$$s'_1 = s_1,\ s'_2 = c_1, \dots, s'_{n+1} = c_n,\ s'_{n+2} = s_2, \dots, s'_{2n} = s_n.$$

Рассмотрим $(2n \times 2n)$-матрицу $A = \|K(t'_i, s'_j)\|_1^{2n}$, знакорегулярную ввиду знакорегулярности $K(t,s)$. Равенство (8.2) означает, что

$$A\begin{pmatrix} 1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \end{pmatrix} = 0. \tag{8.4}$$

Далее, так как c_i — внутренние точки (a, b) и $K(t,s)$ сильно знакорегулярно, то

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \neq 0. \tag{8.5}$$

Невыполнение (8.3) было бы равносильно неравенству

$$A\begin{pmatrix} 1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 \\ 1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ n+2 & n+3 & \dots & 2n \end{pmatrix} > 0,$$

что в силу (8.4), (8.5) противоречит лемме 2. Итак, из (8.2) вытекает (8.3), т. е. существование нулевого минора n-го порядка влечет за собой существование нулевого минора $(n-1)$-го порядка (с соответствующими t_i, s_i). Продолжая этот процесс понижения порядка, придем к $t_1^0, t_2^0, s_1^0, s_2^0$, удовлетворяющим условию (8.1) (при $n = 2$) и таким, что

$$K\begin{pmatrix} t_1^0 & t_2^0 \\ s_1^0 & s_2^0 \end{pmatrix} = 0, \tag{8.6}$$

$$K(t_1^0, s_1^0)K(t_2^0, s_2^0) = 0. \tag{8.7}$$

Отсюда сразу следует, что

$$K(t_1^0, s_2^0)K(t_2^0, s_1^0) = 0. \tag{8.8}$$

Но соотношения (8.7) и (8.8) несовместны, так как из (8.7) следует, что $\varepsilon_2 = -1$, а из (8.8), что $\varepsilon_2 = 1$. В самом деле, рассмотрим, например, равенство (8.7). Пусть для определенности $K(t_1^0, s_1^0) = 0$. Ввиду (8.1) и сильной знакорегулярности $K(t,s)$ в $I_1 \times I_2$ это возможно лишь в случае $t_1^0 = s_1^0 = a$. Отсюда, в частности, $a \in I_1 I_2$ и, следовательно, $K(a,c)K(c,a) > 0$ при $a < c < b$. Так как $K(a,a) = 0$, то

$$K\begin{pmatrix} a & c \\ a & c \end{pmatrix} < 0,$$

т. е. $\varepsilon_2 = -1$. Аналогично из (8.8) следует, что $\varepsilon_2 = 1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

В связи с интегральным оператором (1.1) нам далее понадобится ядро m-й итерации ассоциированного ядра

$$K^{\{n\}m}(T,S)=\int\limits_{\overline{\Delta}_n}\ldots\int\limits_{\overline{\Delta}_n}K^{\{n\}}(T,S_1)\ldots$$
$$\ldots K^{\{n\}}(S_{m-1},S)d\sigma^n(S_1)\ldots d\sigma^n(S_{m-1}),$$

где $\sigma^n(S)$ — мера, индуцированная в $[a,b]^n$ неубывающей на $[a,b]$ функцией $\sigma(t)$. Множество точек роста $\sigma(t)$ в $[a,b]$ обозначим через I_σ.

Лемма 7. *Если $K(t,s)$ сильно знакорегулярно в $I_1\times I_2$ и $|I_1I_2I_\sigma|\geqslant n$, то при $m\geqslant n\geqslant 2$*

$$\varepsilon_n^m K^{\{n\}m}(T,S)>0 \ \text{ в } \ \Delta_n(I_1I_2I_\sigma)\times\Delta_n(I_1I_2I_\sigma).$$

Здесь, как и обычно, $|R|$ — число точек множества R.

Доказательство леммы 7 использует лемму 6 и (в отличие от доказательства самой леммы 6) не требует изменений по сравнению со случаем $\varepsilon_i=1$ ([1], с. 231).

Замечание 3. *Если $\sigma(t)$ имеет по крайней мере одну точку роста внутри (a,b), то лемма 7 остается в силе и при $n=1<m$. Более того, в этом случае m-я итерация ядра очевидно не имеет нулей в $I_1\times I_2$.*

9. Переходим к рассмотрению интегрального уравнения

$$x(t)=\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,d\sigma(s)\quad(a\leqslant t\leqslant b) \tag{9.1}$$

с ядром, сильно знакорегулярным в $I_1\times I_2$. Нам будет удобно предполагать дополнительно, что ядро аннулируется вне $I_1\times I_2$ (т. е. на сторонах квадрата $[a,b]^2$, дополняющих $I_1\times I_2$ до $[a,b]^2$). Это требование не является ограничительным и, как будет видно из дальнейшего, для сильно знакорегулярных функций Грина при надлежащем выборе I_1,I_2 выполняется автоматически. Как и раньше, функция $\sigma(t)$ далее — конечная и неубывающая на $[a,b]$; I_σ — множество ее точек роста в $[a,b]$.

В ближайших двух пунктах будет доказано следующее предложение, характеризующее связи типа B $\to$ C для интегральных уравнений.

Теорема 4. *Пусть непрерывное ядро $K(t,s)$ сильно знакорегулярно в $I_1\times$ $\times\, I_2$ и равно нулю вне $I_1\times I_2$, а $\sigma(s)$ имеет по крайней мере одну точку роста внутри (a,b). Тогда:*

1°. Уравнение (9.1) *имеет бесконечное (счетное) множество характеристических значений, если* $\sigma(s)$ *имеет бесконечное число точек роста в* $[a,b]$*; в противном случае уравнение* (9.1) *имеет* $|I_1 I_2 I_\sigma|$ *характеристических значений.*

2°. Все характеристические значения являются вещественными, простыми и (при соответствующей нумерации) удовлетворяют неравенствам

$$0 < \varepsilon_0\varepsilon_1\lambda_1 < \varepsilon_1\varepsilon_2\lambda_2 < \ldots \quad (\varepsilon_i = \varepsilon_i(K)). \tag{9.2}$$

3°. Соответствующие собственные функции $x_1(t), x_2(t), \ldots$ *образуют ряд Маркова в* $[a,b]$ *относительно* $I_1 I_\sigma$.

4°. Собственная функция $x_i(t)$ *имеет ровно* $i-1$ *узлов в* (a,b)*, обращается в нуль в концах* $[a,b]$*, не принадлежащих* I_1*, и никаких других нулей в* $[a,b]$ *не имеет* $(i = 1, 2, \ldots)$.

5°. Всякая нетривиальная линейная комбинация

$$c_k x_k(t) + c_{k+1} x_{k+1}(t) + \ldots + c_m x_m(t) \quad \left(1 \leqslant k \leqslant m, \sum_k^m |c_i| > 0\right)$$

имеет в I_1 *не менее* $k-1$ *узловых мест и не более* $m-1$ *нулевых мест; последнее остается в силе, если каждое пучное место считать за два нулевых.*

6°. Нули $x_i(t)$ *и* $x_{i+1}(t)$ *в* (a,b) *перемежаются* $(i = 2, 3, \ldots)$.

Данное предложение обобщает центральные теоремы монографии [1] Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна (теоремы 4 и 5 §4 главы IV), относящиеся к случаю, когда $K(t,s)$ симметрично и $1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots$.

Доказательство 1° – 3° будет дано в этом пункте, а 4°, 5° — в следующем; на доказательстве 6° мы не будем останавливаться, так как оно не требует изменений по сравнению с [1].

Заметим сразу, что без ограничения общности можно далее считать $\sigma(t)$ непрерывной в концах $[a,b]$, не принадлежащих $I_1 I_2$. Действительно, пусть для определенности $\sigma(a+0) \neq \sigma(a)$, $a \notin I_1 I_2$. Переопределим $\sigma(a)$ по непрерывности справа. Если $a \notin I_2$, это не меняет интегрального оператора в правой части (9.1), так как $K(t,a) \equiv 0$. Если же $a \notin I_1$, то оператор, изменяясь в целом, не меняется на своей области значений, содержащей лишь функции, аннулирующиеся при $t = a$; следовательно, переопределение не отражается на собственных и присоединенных функциях (отвечающих конечным λ). После указанного переопределения $\sigma(t)$ в концах $[a,b]$, естественно,

$$|I_1 I_2 I_\sigma| = |I_\sigma|.$$

Рассмотрим наряду с (9.1) уравнения

$$X(T) = \mu \int\limits_{\Delta_n[a,b]} K^{\{n\}}(T,S)X(S)\,d\sigma^n(S) \quad (T \in \Delta_n[a,b]), \tag{9.3}$$

$$X(T) = \nu \int\limits_{\Delta_n[a,b]} \varepsilon_n^m K^{\{n\}m}(T,S)X(S)\,d\sigma^n(S) \quad (T \in \Delta_n[a,b]), \tag{9.4}$$

Покажем, что при $n \leqslant |I_\sigma|, n < m$ уравнение (9.4) удовлетворяет условиям леммы 5.

Действительно, нетрудно видеть, что для уравнения (9.4) в обозначениях п. 7

$$\Omega = \Delta_n[a,b],\ \Omega_\sigma = \Delta_n(I_\sigma),\ \Omega_1 \subset \Delta_n(I_1),\ \Omega_2 \subset \Delta_n(I_2). \tag{9.5}$$

С другой стороны, из леммы 7 вытекает, что

$$\Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma) \subset \Omega_1\Omega_2. \tag{9.6}$$

Сопоставляя (9.5) и (9.6), получаем

$$\Omega^* = \Omega_1\Omega_2\Omega_\sigma = \Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma).$$

Так как ядро уравнения (9.4) очевидно неотрицательно, отсюда, ввиду леммы 7 и замечания к ней, следует, что уравнение (9.4) удовлетворяет условиям леммы 5.

Таким образом, уравнение (9.4) при $n \leqslant |I_\sigma|$ имеет простое характеристическое значение $\nu_{nm} > 0$, меньшее модулей остальных характеристических значений. Следовательно, и уравнение (9.3) при каждом $n \leqslant |I_\sigma|$ также имеет простое характеристическое значение μ_n, которое является строго наименьшим по модулю, и

$$\varepsilon_n^m \mu_n^m = \nu_{nm} > 0 \quad (n \leqslant |I_\sigma|, m > n). \tag{9.7}$$

Полагая $n = 1, 2, \ldots$(вплоть до $|I_\sigma|$, если $|I_\sigma|$ конечно) и применяя теорему Шура, получаем, что уравнение (9.1) имеет не менее $|I_\sigma|$ характеристических значений; в частности, при $|I_\sigma| = \infty$ множество характеристических значений бесконечно (а следовательно, счетно). Для доказательства 1° осталось заметить, что при $|I_\sigma| < \infty$ характеристических значений не более $|I_\sigma|$. Действительно, в этом случае область значений интегрального оператора в правой части (9.1) не более чем $|I_\sigma|$-мерна.

Переходим к 2°. Так как (9.7) имеет место, в частности, при $m = n+1$ и $m = n+2$, то μ_n вещественно и $\varepsilon_n \mu_n > 0$. Учитывая строгую минимальность по модулю μ_n и возвращаясь к уравнению (9.1), имеем, согласно теореме Шура,

$$0 < \varepsilon_n \cdot \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n < |\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\lambda_{n+1}| \leqslant \ldots \quad (1 \leqslant n \leqslant |I_\sigma|).$$

Полагая последовательно $n = 1, 2, \ldots$, получаем вещественность всех характеристических значений уравнения (9.1) и соотношение (9.2).

Докажем 3°. Пусть

$$x_1(t), x_2(t), \ldots \tag{9.8}$$

суть собственные функции уравнения (9.1), отвечающие соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (ввиду простоты спектра присоединенные функции отсутствуют). Согласно теореме 3,

$$X_n(T) = x\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ s_1 & \ldots & s_n \end{pmatrix} \ (T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n[a,b],\ n \leqslant |I_\sigma|) \tag{9.9}$$

есть собственная функция (9.3), отвечающая $\mu_n = \lambda_1\ldots\lambda_n$, а значит, и собственная функция уравнения (9.4), отвечающая $\nu_{nm} = \varepsilon_n^m \mu_n^m$. Применяя опять-таки лемму 5 к (9.4), имеем

$$X_n(T) \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Delta_n[a,b], \tag{9.10}$$

$$X_n(T) > 0 \ \text{ на } \ \Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma). \tag{9.11}$$

Соотношения (9.10), (9.11) имеют место, разумеется, при подходящем выборе $X_n(T)$ из соответствующего одномерного пространства. Равенство (9.9) очевидно остается в силе, если и функции (9.8) выбирать соответствующим образом. Далее всюду предполагается, что $x_i(t)$ выбраны так, чтобы для (9.9) выполнялись соотношения (9.10), (9.11) (в частности, все $x_i(t)$ вещественны).

Здесь и далее полезен следующий простой факт, который для удобства ссылок выделим как лемму.

Лемма 8. *Если выполнены условия теоремы 4, то $X_n(T) \neq 0$ при тех и только тех $T \in \Delta_n[a,b]$, для которых существует $S \in \Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma)$ такое, что $K^{\{n\}}(T,S) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть для некоторого $T_0 \in \Delta_n[a,b]$ нашлось требуемое S_0. В силу (9.11) $X_n(S_0) > 0$. Так как $\varepsilon_n K^{\{n\}} \geqslant 0$, то неравенство $X_n(T_0) \neq 0$ вытекает из (9.3), (9.10).

Обратное сразу вытекает из замечания в конце п. 7 (так как здесь $\Omega^* = \Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma)$).

Для завершения доказательства 3° нужно усилить (9.11) до

$$X_n(T) > 0 \ \text{ на } \ \Delta_n(I_1 I_\sigma) \quad (n \leqslant |I_\sigma|). \tag{9.12}$$

Проверим (9.12) для произвольного $T = (t_1, \ldots, t_n)$ из $\Delta_n(I_1 I_\sigma)$. Положим $s_i = t_i$ для всех i таких, что $t_i \in I_2$. Далее, если, например, $t_1 = a \notin I_2$, то в качестве s_1 выберем какую-либо точку роста $\sigma(t)$ в (a, t_2); таковая существует, так как $a \in I_\sigma, a \notin I_2$, и по нашему предположению $\sigma(t)$ не имеет изолированных точек роста вне $I_1 I_2$. Аналогично, если $t_n = b \notin I_2$, выбираем в качестве s_n точку роста $\sigma(t)$ в (t_{n-1}, b). Построенная точка $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma)$ такова, что для пары $T = \{t_i\}$, $S = \{s_i\}$ выполнены условия «разделения» леммы 6 и, следовательно, $K^{\{n\}}(T, S) \neq 0$. По лемме 8 $\quad X_n(\mathrm{T}) > 0$.

В силу (9.10), (9.12) функции (9.8) образуют, согласно определению, ряд Маркова в $[a, b]$ относительно $I_1 I_\sigma$, что и доказывает 3°.

10. *Доказательство* 4°. Отметим сразу, что так как $K(t, s) = 0$ при $t \notin I_1$, то все собственные функции очевидно, равны нулю вне I_1.

При $i = 1$ утверждение 4° вытекает из леммы 8. В самом деле, $\sigma(t)$ имеет в (a, b) точку роста s_0 $(\in I_1 I_2 I_\sigma)$, при любом $t_0 \in I_1$ $K(t_0, s_0) \neq 0$ ввиду сильной знакорегулярности в $I_1 \times I_2$. Итак, $x_1(t) > 0$ в I_1.

Переходим к доказательству 4° для $i \geqslant 2$. Положим $p = S(x_i, I_\sigma)$. Согласно замечанию к теореме 2, из равенства

$$x_i(t) = \lambda_i \int\limits_a^b K(t, s) x_i(s) d\sigma(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{10.1}$$

вытекает, что $S(x_i) \leqslant p$. Обратное неравенство очевидно, т.е.

$$S(x_i) = p = S(x_i, I_\sigma). \tag{10.2}$$

Поскольку $x_1(t), \ldots, x_i(t)$ образуют чебышевскую систему в $[a, b]$ относительно $I_1 I_\sigma$, то

$$p \leqslant i - 1. \tag{10.3}$$

Нашей ближайшей целью является доказательство противоположного неравенства $p \geqslant i - 1$. Заметим сразу, что $p \geqslant 0$, так как при $x_i(t) \equiv 0$ на I_σ оказалось бы в силу (10.1), что $x_i(t) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Введем в рассмотрение сопряженное уравнение

$$y(t) = \lambda \int\limits_a^b K(s, t) y(s)\, d\sigma(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{10.4}$$

Поскольку ядро $K(t, s)$ сильно знакорегулярно в $I_1 \times I_2$, ядро $K_1(t, s) = K(s, t)$ сильно знакорегулярно в $I_2 \times I_1$. Поэтому для собственных функций $y_1(t), y_2(t), \ldots$ уравнения (10.4) сохраняются все факты, установленные выше для уравнения (9.1), с тем лишь отличием, что I_1 и I_2 меняются ролями. Будем считать $y_1(t), y_2(t), \ldots$ выбранными так, что для них выполняются соотношения, аналогичные (9.10), (9.11).

Поскольку системы $\{x_k(t)\}$ и $\{y_k(t)\}$ биортогональны, то

$$\int_a^b x_m(t) y_n(t)\, d\sigma(t) = 0 \ \text{ при } m \neq n. \tag{10.5}$$

Отсюда вытекает, что $p \geqslant 1$, так как $y_1(t) > 0$ в $I_2 \supset (a, b)$. Выберем в $I_1 I_2 I_\sigma$ точки $s_1 < s_2 < \ldots < s_{p+1}$ такие, что

$$x_i(s_j) x_i(s_{j+1}) < 0,\ j = 1, 2, \ldots, p.$$

(Это можно сделать ввиду (10.2) и сказанного выше о поведении $\sigma(t)$ в концах $[a, b]$.)

В каждом из интервалов (s_j, s_{j+1}) имеется ровно одно узловое место функции $x_i(t)$; какую-либо точку на этом узловом месте обозначим через t_j $(j = 1, \ldots, p)$

$$s_1 < t_1 < s_2 < \ldots < s_p < t_p < s_{p+1}. \tag{10.6}$$

Покажем, что определитель

$$y\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_p & t \\ 1 & 2 & \ldots & p & p+1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p+1} c_j y_j(t) \tag{10.7}$$

при любом $t \in I_2$, отличном от $t_1, \ldots, t_p$, удовлетворяет соотношению

$$(t - t_1) \ldots (t - t_p) y\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_p & t \\ 1 & \ldots & p & p+1 \end{pmatrix} > 0. \tag{10.8}$$

Пусть $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{p+1}$ — числа $t_1, t_2, \ldots, t_p, t$, занумерованные в порядке возрастания. Ввиду (10.6)

$$\begin{matrix} t'_1 \\ s_1 \end{matrix} < \begin{matrix} t'_2 \\ s_2 \end{matrix} < \cdots < \begin{matrix} t'_{p+1} \\ s_{p+1} \end{matrix}$$

откуда в силу леммы 6 и соотношений $t'_1, \ldots, t'_{p+1} \in I_2$, $s_1, \ldots, s_{p+1} \in I_1$

$$K_1\begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 & \ldots & t'_{p+1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{p+1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Применяя лемму 8 к уравнению (10.4), имеем

$$y\begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 & \ldots & t'_{p+1} \\ 1 & 2 & \ldots & p+1 \end{pmatrix} > 0,$$

что очевидно эквивалентно (10.8).

Из самого построения точек $t_1, \ldots, t_p$, а также из соотношения $S(x_i) = p$ и (10.8) явствует, что функция (10.7) и x_i не ортогональны, но это возможно лишь при $p \geqslant i-1$. Учитывая (10.3), получим $p = i-1$.

Покажем теперь, что никаких нулей помимо $t_1, \ldots, t_{i-1}$ функция x_i в I_1 не имеет. Для этого заметим, что при любом $t \in I_1$, отличном от $t_1, \ldots, t_{i-1}$,

$$(t-t_1)\ldots(t-t_{i-1})x\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_{i-1} & t \\ 1 & \ldots & i-1 & i \end{pmatrix} > 0;$$

это доказывается точно так же, как (10.8). Поскольку $x_i(t_1) = \ldots = x_i(t_{i-1}) = 0$, имеем

$$x\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_{i-1} & t \\ 1 & \ldots & i-1 & i \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_{i-1} \\ 1 & \ldots & i-1 \end{pmatrix} x_i(t),$$

откуда $x_i(t) \neq 0$ $(t \in I_1, t \neq t_1, \ldots, t_p)$. Утверждение 4° доказано.

Доказательству 5° предпошлем лемму.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Если точки* $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ *принадлежат различным нулевым местам в* I_1 *некоторой линейной комбинации* $x(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$ *собственных функций уравнения* (9.1)*, то*

$$x\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix} \neq 0. \tag{10.9}$$

Доказательство. Предположим противное: пусть определитель в левой части (10.9) равен нулю. Так как, согласно 4°, $x_1(t_1) > 0$ при $t_1 \in I_1$, то найдется p $(2 \leqslant p \leqslant m)$ такое, что

$$x\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_{p-1} \\ 1 & 2 & \ldots & p-1 \end{pmatrix} > 0. \tag{10.10}$$

$$x\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} = 0. \tag{10.11}$$

Чтобы получить противоречие, достаточно показать, что t_{p-1} и t_p принадлежат одному нулевому месту функции x. Для этого зафиксируем произвольное $t^* \in (t_{p-1}, t_p)$ и покажем, что $x(t^*) = 0$.

Соотношение (10.11) означает в силу леммы 8, что

$$K\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_p \\ s_1 & \ldots & s_p \end{pmatrix} = 0 \text{ при всех } s_1 < \ldots < s_p \text{ из } I_1I_2I_\sigma. \tag{10.12}$$

Пусть $s_1 < \ldots < s_p$ из $I_1I_2I_\sigma$ произвольны. Рассмотрим знакорегулярную матрицу

$$
\begin{pmatrix}
K(t_1,s_1) & K(t_1,s_2) & \ldots & K(t_1,s_p) \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
K(t_{p-1},s_1) & K(t_{p-1},s_2) & \ldots & K(t_{p-1},s_p) \\
K(t^*,s_1) & K(t^*,s_2) & \ldots & K(t^*,s_p) \\
K(t_p,s_1) & K(t_p,s_2) & \ldots & K(t_p,s_p)
\end{pmatrix}.
$$

Так как $K(t,s)$ сильно знакорегулярно в $I_1 \times I_2$, то в последней строке есть ненулевые элементы (это верно и при $p = 2$, так как равенство $K(t_2,s_1) = K(t_2,s_2)$ при $t_2 \in I_1, s_1, s_2 \in I_2$ очевидно невозможно). Отсюда

$$
K\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_{p-1} & t^* \\ s_1 & \ldots & s_{p-1} & s_p \end{pmatrix} = 0 \quad (s_1 < \ldots < s_p \text{ из } I_1 I_2 I_\sigma). \tag{10.13}
$$

Действительно, если первые $p-1$ строк линейно-независимы, то согласно лемме 1 p-я строка должна быть их линейной комбинацией.

Учитывая (10.13) и замечание в конце п. 7, получаем

$$
x\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_{p-1} & t^* \\ 1 & \ldots & p-1 & i \end{pmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{10.14}
$$

поскольку левая часть по теореме Шура есть собственная функция уравнения (9.3) (для которого $\Omega^* = \Delta_n(I_1 I_2 I_\sigma)$).

Соотношения (10.10), (10.14) показывают, что последняя строка любого определителя в левой части (10.14) есть линейная комбинация остальных строк с коэффициентами, не зависящими от i,

$$
x_i(t^*) = d_1 x_i(t_1) + \ldots + d_{p-1} x_i(t_{p-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots).
$$

Отсюда

$$
x(t^*) = \sum_{i=k}^{n} c_i x_i(t^*) = \sum_{i=k}^{n} c_i \sum_{j=1}^{p-1} d_j x_i(t_j) = \sum_{j=1}^{p-1} d_j x(t_j) = 0,
$$

что и требовалось доказать.

Переходим к 5°. Рассмотрим функцию

$$
x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_m x_m(t) \quad \Bigl(\sum_{i=1}^{m} |c_i| > 0\Bigr). \tag{10.15}
$$

Покажем вначале, что при $c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$ $x(t)$ имеет в I_1 не менее $k-1$ узловых мест, т. е. $S(x) \geqslant k-1$. Без ограничения общности можно считать, что $c_k \neq 0$.

В силу замечания к теореме 2 оператор

$$\mathbf{K}y = \int_a^b K(t,s)y(s)d\sigma(s)$$

не повышает числа перемен знака. Поэтому

$$S(x) \geqslant S(\mathbf{K}x) \geqslant S(\mathbf{K}^2 x) \geqslant \ldots. \tag{10.16}$$

С другой стороны, поскольку $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots$,

$$\lambda_k^n(\mathbf{K}^n x)(t) = \lambda_k^n \left(\frac{c_k}{\lambda_k^n} x_k(t) + \ldots + \frac{c_m}{\lambda_m^n} x_m(t) \right) \to c_k x_k(t) \quad (n \to \infty).$$

Так как в силу 4° $S(c_k x_k) = k-1$, то при достаточно большом n

$$S(\mathbf{K}^n x) \geqslant k-1.$$

Отсюда, согласно (10.16), $S(x) \geqslant k-1$.

Тот факт, что число нулевых мест в I_1 функции (10.15) не превышает $m-1$, непосредственно следует из леммы 9. Действительно, если бы нашлись точки $t_1, \ldots, t_m$, принадлежащие различным нулевым местам в I_1 функции x, то по лемме 9

$$x \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix} \neq 0,$$

но это противоречит тому, что нетривиальная линейная комбинация функций $x_1, \ldots, x_m$ аннулируется в точках $t_1, \ldots, t_m$.

Докажем теперь, что эта оценка остается в силе, если каждое пучное место считать дважды. Пусть $J_1, \ldots, J_r$ — нулевые места в I_1 функции (10.15), причем $J_1, \ldots, J_s$ –пучные ($s \leqslant r$). Мы построим линейную комбинацию функций $x_1, \ldots, x_m$, имеющую не менее $r+s$ нулевых мест в I_1; отсюда, согласно предыдущему, будет следовать $r + s \leqslant m-1$.

Каждому пучному месту $J_k = [\xi_k, \eta_k]$ сопоставим число $\delta_k = \operatorname{sign} x \times \times (\xi_k - \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$. Выберем далее каким-либо образом точки $t_i \in \in J_1,\ i = 1, \ldots, r$, и рассмотрим систему уравнений относительно $d_1, \ldots, d_m$

$$\begin{aligned} &d_1 x_1(t_1) + d_2 x_2(t_1) + \ldots + d_m x_m(t_1) = \delta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_1 x_1(t_s) + d_2 x_2(t_s) + \ldots + d_m x_m(t_s) = \delta_s, \\ &d_1 x_1(t_{s+1}) + d_2 x_2(t_{s+1}) + \ldots + d_m x_m(t_{s+1}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_1 x_1(t_r) + d_2 x_2(t_r) + \ldots + d_m x_m(t_r) = 0. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Согласно лемме 9, $\det \|x_i(t_j)\|_1^r \neq 0$, так что ранг матрицы коэффициентов равен r и система совместна. Зафиксируем какое-либо решение $d_1, \ldots, d_m$, и положим

$$x_\varepsilon(t) = x(t) - \varepsilon[d_1 x_1(t) + \ldots + d_m x_m(t)]. \tag{10.18}$$

Покажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $x_\varepsilon(t)$ имеет в I_1 не менее $r+s$ нулевых мест.

Выберем в интервале (a,b) точки $\tau_1 < \ldots < \tau_{r-1}$ так, чтобы $x(\tau_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r-1$, и каждый из промежутков

$$[a, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \ldots, (\tau_{r-2}, \tau_{r-1}), (\tau_{r-1}, b] \tag{10.19}$$

содержал нулевое место $x(t)$ в I_1. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то наряду с неравенством $x(\tau_i) \neq 0$, будут выполнены также неравенства

$$x_\varepsilon(\tau_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1,$$

показывающие, что каждое нулевое место $x_\varepsilon(t)$ целиком лежит в одном из промежутков (10.19).

Так как $x_\varepsilon(t_{s+1}) = \ldots = x_\varepsilon(t_r) = 0$, то каждый из промежутков (10.19), содержащий какое-либо из нулевых мест $J_{s+1}, \ldots, J_r$ функции x, содержит по крайней мере одно нулевое место функции x_ε. Рассмотрим теперь один из промежутков (10.19), содержащий пучное место J_k $(1 \leqslant k \leqslant s)$ функции x, и покажем, что при малом ε он будет содержать не менее двух нулевых мест x_ε. Пусть, например, $J_k \subset (\tau_i, \tau_{i+1})$. Так как $x(t) \neq 0$ в $(\tau_i, \tau_{i+1}) \backslash J_k$, то $\delta_k x(\tau_i) > 0$, $\delta_k x(\tau_{i+1}) > 0$. Отсюда при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\delta_k x_\varepsilon(\tau_i) > 0, \ \delta_k x_\varepsilon(\tau_{i+1}) > 0. \tag{10.20}$$

В то же время, согласно (10.17), (10.18),

$$x_\varepsilon(t_k) = x(t_k) - \varepsilon\delta_k = -\varepsilon\delta_k. \tag{10.21}$$

Так как $\tau_i < t_k < \tau_{i+1}$, и $\varepsilon > 0$, то из (10.20), (10.21) вытекает, что $x_\varepsilon(t)$ имеет в (τ_i, τ_{i+1}) не менее двух нулевых мест.

Случай, когда пучное место J_k принадлежит одному из крайних промежутков $[a, \tau_1), (\tau_{r-1}, b]$, рассматривается аналогично. Пусть, например, $J_k = [\xi, \eta] \subset [a, \tau_1)$. Тогда достаточно взять любое $\tau_0 \in (a, \xi)$ (если $a \in I_1$ то можно взять и $\tau_0 = a$); так как $x(\tau_0) \neq 0$, то при малом $\varepsilon > 0$ будут выполняться как (10.20) (при $i = 0$), так и (10.21).

Итак, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $x_\varepsilon(t)$ имеет в I_1 не менее $r+s$ нулевых мест. Утверждение 5° доказано.

Из 5°, в частности, вытекает, что если функция (10.15) имеет $m - 1$ нулевых мест, целиком содержащихся в (a,b), то все они являются узловыми (ср. [1]). Отметим также, что в силу 3° всякая функция вида (10.15) имеет в $I_1 I_\sigma$ не более $m-1$ нулей; поэтому в случае $\sigma(s)$, всюду растущей в $[a, b]$ (в частности, при $d\sigma(s) = ds$), все нулевые места этих функций являются изолированными нулями.

Как уже говорилось, 6° доказывается так же, как соответствующее утверждение в [1] (гл. IV, теорема 5, 5°). Итак, теорема 4 доказана.

Литература

1. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.
2. *Karlin, S.* Total positivity / S. Karlin. — Stanford univ. press edition. — 1968. — Vol. 1. — 576 p.
3. *Kellogg, O. D.* The oscillation of functions of an orthogonal set / O. D. Kellogg // *Amer. J. Math.* — 1916. — Vol. 38. — P. 1—5.
4. *Kellogg, O. D.* Orthogonal function sets arising from integral equations / O. D. Kellogg // *Amer. J. Math.* — 1918. — Vol. 40. — P. 145—154.
5. *Гантмахер, Ф. Р.* О несимметрических ядрах Келлога / Ф. Р. Гантмахер // *ДАН СССР*. — 1936. — Т. 1, № 1. — С. 3—5.
6. *Крейн, М. Г.* О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1939. — Т. 25, № 8. — С. 643—646.
7. *Крейн, М. Г.* Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1939. — Т. 25, № 9. — С. 717—720.
8. *Schoenberg, I. J.* On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre — Polya — Schur type / I. J. Schoenberg // *Proc. Nat. Akad. Sci. USA*. — 1947. — Vol. 33. — P. 11—17.
9. *Schoenberg, I. J.* On smoothing operations and their generating functions / I. J. Schoenberg // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1953. — Vol. 59. — P. 199—230.
10. *Хиршман, И. И.* Преобразования типа свертки / И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер. — М.: Изд-во иностр. лит., 1968. — 316 с.
11. *Schoenberg, I. J.* Über variationsvermindernde lineare Transformationen / I. J. Schoenberg // *Math. Z.* — 1930. — Vol. 32. — P. 321—328.
12. *Степанов, Г. Д.* О знакопостоянных класса p матрицах и ядрах / Г. Д. Степанов // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1973. — Вып. 5. — С. 138—151.
13. *Полиа, Г.* Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сёге. — М.: Гостехиздат, 1956. — Т. 2. — 432 с.
14. *Coppel, W. A.* Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220 /

W. A. Coppel. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1971. — 147 p.
15. *Schur, I.* Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen / I. Schur // *Math. Ann.* — 1909. — Vol. 67, no. 3. — P. 306—339.
16. *Schatten, R.* A theory of cross-spaces / R. Schatten. — Princeton, Univ. press, 1950. — 186 p.
17. *Jentzsch, R.* Über Integralgleichungen mit positiven Kern / R. Jentzsch // *Journ. für reine und angew. Math.* — 1912. — Vol. 141. — P. 235—244.
18. *Крейн, М. Г.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха / М. Г. Крейн, М. А. Рутман // *УМН*. — 1948. — Т. 3, № 1 (23). — С. 8—95.
19. *Красносельский, М. А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Физматгиз, 1962. — 394 с.

13. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака[14]. II

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Нумерация пунктов и предложений продолжает нумерацию [1]; сохранены также обозначения [1].

11. Ниже будут рассматриваться краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка ($n \geqslant 2$).

Пусть $G(t,s)$ — функция Грина оператора

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{11.1}$$

с вещественными суммируемыми в $[a,b]$ коэффициентами, отвечающая каким-либо двухточечным краевым условиям, заданным в концах a, b.

Как известно, $G(t,s)$ является непрерывным невырожденным ядром вида

$$G(t,s) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} u_{i1}(t)v_{i1}(s) & (a \leqslant t \leqslant s \leqslant b), \\ \sum\limits_{i=1}^{l} u_{i2}(t)v_{i2}(s) & (a \leqslant s \leqslant t \leqslant b). \end{cases} \tag{11.2}$$

Здесь $\{u_{ij}\}, \{v_{ij}\}, j = 1, 2,$ — системы функций, линейно-независимых на каждом подынтервале промежутка $[a,b]$; среди функций $u_{11}, \ldots, u_{k1}$, $u_{12}, \ldots, u_{l2}$ имеется n линейно-независимых на $[a,b]$. Функции $u_{ij}(t)$ удовлетворяют уравнению $Lu = 0$, а функции $v_{ij}(t)$ — сопряженному уравнению (которое в отсутствие гладкости коэффициентов оператора (11.1) является квазидифференциальным). Оба числа k, l в (11.2) положительны, естественно, если речь идет не о задаче Коши; далее это подразумевается.

Теорема 5 (Крейн—Финкельштейн). *Если функция Грина* (11.2) *знакорегулярна, то при любом* $m \geqslant 1$ *неравенство*

$$\varepsilon_m G\begin{pmatrix} t_1 t_2 \ldots t_m \\ s_1 s_2 \ldots s_m \end{pmatrix} > 0 \quad \left(a < \begin{matrix} t_1 < \ldots < t_m \\ s_1 < \ldots < s_m \end{matrix} < b\right) \tag{11.3}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$s_i < t_{i+k},\ i = 1, 2, \ldots, m-k; \quad t_i < s_{i+l},\ i = 1, \ldots, m-l. \tag{11.4}$$

[14]Левин А. Ю., Степанов Г. Д. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. II // Сибирский математический журнал. — 1976. — Т. 17, № 4. — С. 813—830.

В частности, знакорегулярная функция Грина сильно знакорегулярна в $(a, b)^2$ (если она не является функцией Коши).

Приведенный результат обобщает доказанную в [2] теорему, где речь идет не о знакорегулярных, а о вполне неотрицательных функциях Грина. Так как доказательство в целом проходит по той же схеме, что и в [2], ограничимся здесь несколькими пояснениями. При доказательстве импликации (11.4)$\to$ (11.3) вначале устанавливается, что в квадрате $a < t, s < b$ имеет место одно из неравенств $G(t, s) > 0$, $G(t, s) < 0$ (в зависимости от ε_1); в случае $\varepsilon_2 = 1$ рассуждения фактически не отличаются от [2], а при $\varepsilon_2 = -1$ требуются некоторые достаточно очевидные изменения. Для $m > 1$ доказательство проводится индукцией по m, причем вместо леммы 2 из [2] следует воспользоваться более общей леммой 2 настоящей работы. (Лемма 1 из [2] специфична для вполне неотрицательных матриц, но для доказательства фактически не нужна.) Импликация (11.3)$\to$ (11.4) доказывается в точности так же, как в [2]. Отметим, что результат, родственный теореме Крейна—Финкельштейна (для осцилляционного случая), был позднее независимо получен С. Карлином [3] другим способом.

С помощью теоремы 5 нетрудно показать, что функция Грина двухточечной задачи может быть знакорегулярной лишь в случае распадающихся (с точностью до линейного комбинирования) краевых условий. Для осцилляционного случая это установили П. Д. Калафати [4] и М. Г. Крейн [5]. Простое доказательство М. Г. Крейна легко распространяется на общий случай. В связи с этим далее рассматриваются лишь распадающиеся условия. Отметим, впрочем, что существуют многоточечные краевые задачи со знакорегулярными функциями Грина; для таких задач теорема Крейна—Финкельштейна, строго говоря, несправедлива. Подробнее на этом не останавливаемся.

12. Итак, рассмотрим краевую задачу

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = \lambda r(t)x \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned} U_i x = x^{(k_i)}(a) + \sum_{k<k_i} \gamma_{ik} x^{(k)}(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ U_i x = x^{(k_i)}(b) + \sum_{k<k_i} \gamma_{ik} x^{(k)}(b) = 0, \quad i = m+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{12.2}$$

где числа γ_{ik} вещественны; $p_1, \ldots, p_n, r$ вещественны и суммируемы на $[a, b], r(t) \geqslant 0$ не эквивалентна нулю на $[a, b]$, $1 \leqslant m \leqslant n-1, 0 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant n-1, 0 \leqslant k_{m+1} < \ldots < k_n \leqslant n-1$. Как известно, распадающиеся краевые условия всегда можно привести к нормированному виду (12.2) (вместе с $m = 0, n$ из рассмотрения исключена задача Коши). Множество функций, обладающих абсолютно непрерывной $(n-1)$-й производной на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (12.2), обозначается далее через $\mathcal{D}$. Очевидно, оператор L действует из $\mathcal{D}$ в $L_1[a, b]$. Как обычно, задача (12.1)—(12.2) называется неособой, если $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Промежутки I_1, I_2 определим по краевым условиям (12.2) следующим образом. I_1 есть отрезок $[a, b]$, из которого исключены точка a, если $k_1 = 0$, и точка b, если $k_{m+1} = 0$. I_2 есть отрезок $[a, b]$, из которого исключены точка a, если $k_m < n-1$, и точка b, если $k_n < n-1$.

Через I_σ обозначим множество точек роста в $[a, b]$ функции

$$\sigma(t) = \int\limits_a^t r(s)\, ds.$$

Теорема 6. *Следующие три условия эквивалентны:*

1) L не понижает числа перемен знака на функциях из $\mathcal{D}$;

2) при краевых условиях (12.2) *L обладает знакорегулярной функцией Грина;*

3) при краевых условиях (12.2) *L обладает функцией Грина, сильно знакорегулярной в $I_1 \times I_2$ и равной нулю в $[a, b]^2 \setminus I_1 \times I_2$.*

Любое из этих условий влечет за собой следующие факты.

1°. Все собственные значения λ_i задачи (12.1)—(12.2) *(таковых счетное число) являются вещественными и простыми, причем $0 < |\lambda_1| < < |\lambda_2| < \ldots$.*

2°. Собственная функция $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, отвечающая собственному значению λ_i, имеет ровно i—1 нулей в (a, b). Все эти нули простые. В концах $[a, b]$ x_i имеет нули точно той кратности, которая задана краевыми условиями (подробнее, кратность нуля x_i в точке a равна 0 при $k_1 > 0$ и $\max\{i : k_i = i - 1\}$ при $k_1 = 0$; кратность в точке b равна 0 при $k_{m+1} > 0$ и $\max\{i : k_{i+m} = i - 1\}$ при $k_{m+1} = 0$).

3°. $x_1, x_2, \ldots$ образуют ряд Маркова в $[a, b]$ относительно $I_1 I_\sigma$. Нули x_i и x_{i+1} перемежаются $(i = 2, 3, \ldots)$. Всякая нетривиальная линейная комбинация $c_k x_k + \ldots + c_m x_m$ $(k \leqslant m)$ имеет в I_1 не менее $k-1$ узловых и не более m—1 нулевых мест; при этом пучные места можно засчитывать дважды.

В значительной мере это предложение является следствием ранее установленных фактов. Начнем с первой части. Заметим сразу, что выполнение 1) влечет за собой существование функции Грина. Действительно, если бы задача (12.1)—(12.2) была особой, то в $\mathcal{D}$ нашлась бы функция $u(t) \not\equiv 0$

такая, что $Lu = 0$, т. е. $S(Lu) = -1 < S(u)$ вопреки 1). Так как непонижение числа перемен знака на функциях из $\mathcal{D}$ оператором L соответствует неповышению числа перемен знака на функциях из $L_1[a, b]$ оператором L^{-1} и так как функция Грина является непрерывным невырожденным ядром, то эквивалентность 1) и 2) вытекает из теоремы 2 (при $M = L_1[a, b]$).

Ясно, что 3) $\to$ 2); в доказательстве нуждается поэтому лишь импликация 2) $\to$ 3). Итак, пусть функция Грина $G(t, s)$ знакорегулярна в $[a, b]^2$. В силу теоремы 5 $G(t, s)$ сильно знакорегулярна в $(a, b)^2$; в частности,

$$\varepsilon_1 G(t, s) > 0 \quad (a < t, s < b). \tag{12.3}$$

Итак, надлежит выяснить поведение G на границе квадрата. Начнем, например, со стороны $t = a$. Так как $a \notin I_1$ в том и только в том случае, когда имеется условие вида $x(a) = 0$, то

$$a \notin I_1 \leftrightarrow G(a, s) \equiv 0 \quad (a < s < b) \tag{12.4}$$

(это не связано со знакорегулярностью G). Для знакорегулярной G, кроме того,

$$a \in I_1 \to G(a, s) \neq 0 \quad (a < s < b). \tag{12.5}$$

Будем доказывать (12.5) от противного. Пусть $a \in I_1$ и $G(a, s^*) = 0$ для некоторого $s^* \in (a, b)$. Тогда

$$G(a, s) \equiv 0 \text{ на одном из интервалов } (a, s^*), (s^*, b). \tag{12.6}$$

В самом деле, ввиду знакорегулярности G

$$\varepsilon_2 G \begin{pmatrix} a & s^* \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (a \leqslant s_1 < s_2 \leqslant b). \tag{12.7}$$

Если $\varepsilon_2 = 1$, положим $s_1 = s^*$; тогда при всех $s_2 > s^* (= s_1)$ (12.7) дает

$$0 \leqslant G \begin{pmatrix} a & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = -G(a, s_2) G(s_1, s_1) \leqslant 0.$$

Так как в силу (12.3) $G(s_1, s_1) \neq 0$, то $G(a, s_2) \equiv 0$ $(s^* < s_2 < b)$. Если $\varepsilon_2 = -1$, то, полагая $s_2 = s^*$, получаем аналогично $G(a, s_1) \equiv 0$ $(a < s_1 < s^*)$. В силу (11.2) и линейной независимости $v_{11}, \ldots, v_{k1}$ на любом подынтервале каждый из случаев (12.6) возможен лишь при $u_{11}(a) = \ldots = u_{k1}(a) = 0$, т. е. $G(a, s) \equiv 0$ $(a < s < b)$. Полученное противоречие с (12.4) (так как $a \in I_1$) доказывает (12.5).

Совершенно аналогично доказывается, что $G(b, s)$ ($\equiv 0$ при $b \notin I_1$) не имеет нулей в интервале $a < s < b$, если $b \in I_1$.

Переходим к рассмотрению G на сторонах $s = a, s = b$. Для определенности исследуем функцию $G(t, b)$. Аналогично предыдущему, используя знакорегулярность G, доказывается, что если $G(t^*, b) = 0$ для некоторого $t^* \in (a, b)$, то $G(t, b) \equiv 0$ на одном из интервалов $(a, t^*), (t^*, b)$. Так как $G(t, b)$ есть решение уравнения $Lx = 0$, то отсюда $G(t, b) \equiv 0$ в $[a, b]$. Итак, заведомо либо $G(t, b) \equiv 0$, либо $G(t, b) \neq 0$ $(a < t < b)$.

Пусть $K(t, s)$ — функция Коши оператора L и $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — система решений уравнения $Lx = 0$ такая, что $U_i x_j = \delta_{ij}$ (такая система существует, так как задача неособая). Нетрудно проверить формулу

$$G(t, s) = K(t, s) - \sum_{i=m+1}^{n} x_i(t) y_i(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b, a < s < b), \tag{12.8}$$

где $y_i(s) = U_i K(t, s)$, $i = m + 1, \ldots, n$ (s здесь понимается как параметр). При $s = a, b$, $G(t, s)$, естественно, доопределяется по непрерывности. Так как

$$\left.\frac{\partial^r K(t, s)}{\partial t^r}\right|_{t=b} \to \delta_{r^{n-1}} \ (s \to b),$$

то $y_i(b - 0) = 0$ при $i < n$, а $y_n(b - 0)$ равно $1(0)$, если $k_n = n - 1$ $(< n - 1)$. Поскольку $x_n(t) \not\equiv 0$, то

$$G(t, b) = G(t, b - 0) = -\sum_{i=m+1}^{n} x_i(t) y_i(b - 0) = -x_n(t) y_n(b - 0)$$

обращается в тождественный нуль в том и только том случае, когда $b \notin I_2$. Случай $s = a$ рассматривается аналогично. Требуемая импликация доказана.

Переходим ко второй части теоремы. Так как 1)–3), эквивалентны, можно считать, что выполнено 3). Утверждения 1° и 3° получаются теперь как непосредственные следствия теоремы 4, отнесенные к интегральному уравнению

$$x(t) = \lambda \int_a^b G(t, s) x(s) d\sigma(s), \tag{12.9}$$

равносильному (12.1)—(12.2); для 1° надо лишь заметить, что в нашей ситуации $|I_\sigma| = \infty$. В доказательстве нуждается только часть 2°, которая является новой по сравнению с теоремой 4 — утверждением о кратности нулей собственных функций.

Начнем с нулей $x_i(t)$ на концах $[a, b]$. Ввиду аналогии достаточно рассмотреть $t = a$. Пусть $a \notin I_1$ и j_0 — наибольшее из j, при которых $k_j = j - 1$ $(1 \leqslant j_0 \leqslant m)$. Очевидно, все $x_i(t)$ имеют в точке $t = a$ нуль кратности $\geqslant j_0$. Требуется доказать, что эта кратность равна j_0.

Далее через $G_j(t, s)$ обозначается $\dfrac{\partial^j G(t, s)}{\partial t^j}$. Ясно, что

$$G_j(a, s) \equiv 0 \quad (a < s < b), \ j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \tag{12.10}$$

$$G_{j_0}(a,s) \not\equiv 0 \quad (a<s<b). \tag{12.11}$$

Покажем, что на самом деле

$$\varepsilon_1 G_{j_0}(a,s) > 0 \quad (a<s<b). \tag{12.12}$$

Из знакорегулярности $G(t,s)$ и соотношений (12.10) вытекает, что

$$\varepsilon_1 G_{j_0}(a,s) \geqslant 0 \quad (a<s<b), \tag{12.13}$$

$$\varepsilon_2 \begin{vmatrix} G_{j_0}(a,s_1) & G_{j_0}(a,s_2) \\ G(t,s_1) & G(t,s_2) \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad (a<t<b, a<s_1<s_2<b). \tag{12.14}$$

Пусть (12.12) не имеет места, т. е. $G_{j_0}(a,s^*)=0$ для некоторого $s^* \in \in (a,b)$. Тогда, если $\varepsilon_2=1$, положим в (12.14) $s_1=s^*$ и получим с учетом (12.13) $G_{j_0}(a,s_2)G(t,s^*) \equiv 0$ при всех $t \in (a,b)$, $s_2 \in (s^*,b)$; так как $G(t,s^*) \neq 0$ при $t \in (a,b)$, то должно быть $G_{j_0}(a,s) \equiv 0$ при $s \in (s^*,b)$. Аналогично, полагая в случае $\varepsilon_2=-1$, $s_2=s^*$, получаем $G_{j_0} \equiv 0$ при $s \in (a,s^*)$. Поскольку функции v_{i1} в представлении (11.2) линейно-независимы на каждом подынтервале, в любом из этих двух случаев $G_{j_0}(a,s) \equiv 0$ в (a,b), что противоречит (12.11). Неравенство (12.12) доказано.

Учитывая (12.12) и положительность x_1 в (a,b), имеем

$$x_1^{(j_0)}(a) = \lambda_1 \int_a^b G_{j_0}(a,s)x_1(s)\,d\sigma(s) \neq 0.$$

Доказанный для x_1 факт распространим теперь на остальные собственные функции. Допустим, что $x_k^{(j_0)}(a)=0$ при некотором $k>1$. Функция x_k имеет ровно $k-1$ нулей $t_1,\ldots,t_{k-1}$ в (a,b), причем каждый из них является узлом. Рассмотрим функцию

$$y_\varepsilon(t) = x_k(t) - x_1(t)x_k(a+\varepsilon)/x_1(a+\varepsilon) \quad (\varepsilon>0).$$

Согласно предположению

$$x_k(a+\varepsilon)/x_1(a+\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0),$$

так что при малых $\varepsilon>0$ y_ε имеет нуль t_i^* вблизи каждой из точек $t_i, i = = 1,\ldots,k-1$; кроме того, $y_\varepsilon(a+\varepsilon)=0$. Очевидно, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ нули $a+\varepsilon, t_1^*,\ldots,t_{k-1}^*$ принадлежат различным нулевым местам, т. е. y_ε имеет не менее k нулевых мест в (a,b). Полученное противоречие с 3° доказывает, что кратность нуля $x_k(t)$ при $t=a$ в точности равна j_0.

Переходим к доказательству простоты нулей $x_i(t)$ внутри (a,b). Установим вначале неравенство

$$\varepsilon_2 \begin{vmatrix} G(t,s_1) & G(t,s_2) \\ G_1(t,s_1) & G_1(t,s_2) \end{vmatrix} > 0 \quad (a < s_1 < t < s_2 < b). \tag{12.15}$$

Нестрогое неравенство легко вытекает из знакорегулярности G (предельным переходом). Допустим, что (12.15) не имеет места, т. е. $G_1(t^{'}, s_i^{'}) = \alpha G(t^{'}, s_i^{'}), i = 1,2$, для некоторых $\alpha, t^{'}, s_1^{'}, s_2^{'}$ $(a < s_1^{'} < t^{'} < s_2^{'} < b)$. Тогда при любом $s \in (s_1^{'}, s_2^{'})$ имеем

$$0 \leqslant \begin{vmatrix} G(t^{'},s_1^{'}) & G(t^{'},s) \\ G_1(t^{'},s_1^{'}) & G_1(t^{'},s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G(t^{'},s) & G(t^{'},s_2^{'}) \\ G_1(t^{'},s) & G_1(t^{'},s_2^{'}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} G(t^{'},s_1^{'}) & G(t^{'},s) \\ 0 & G_1(t^{'},s) - \alpha G(t^{'},s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G(t^{'},s) & G(t^{'},s_2^{'}) \\ G_1(t^{'},s) - \alpha G(t^{'},s) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -G(t^{'},s_1^{'})G(t^{'},s_2^{'})\big[G_1(t^{'},s) - \alpha G(t^{'},s)\big]^2 = 0.$$

Поскольку $\varepsilon_1 G(t,s) > 0$ при $t,s \in (a,b)$, отсюда следует, что

$$G_1(t^{'},s) - \alpha G(t^{'},s) \equiv 0 \quad (s_1^{'} < s < s_2^{'}). \tag{12.16}$$

Нетрудно видеть, что (12.16) невозможно. В случае гладких коэффициентов уравнения достаточно заметить, что $\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} G_1(t^{'},s)$ в отличие от $\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} G(t^{'},s)$ разрывна по s при $s = t^{'}$. В общем случае можно, например, воспользоваться представлением G в виде (11.2) (где $k = n - m, l = m$). В силу линейной независимости системы $\{v_{i1}\}$ в $(t^{'}, s_2^{'})$ и системы $\{v_{i2}\}$ в $(s_1^{'}, t^{'})$ из (12.16) следовало бы, что n линейно-независимых решений $u_{11}, \ldots, u_{n-m1}, u_{12}, \ldots, u_{m2}$ уравнения $Lu = 0$ удовлетворяют соотношению $\dot u(t^{'}) - \alpha u(t^{'}) = 0$. Полученное противоречие доказывает (12.15).

Займемся теперь вронскианом функций x_1, x_2. Соотношение

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(\tau) & x_2(\tau) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \iint\limits_{a \leqslant s_1 < s_2 < b} \begin{vmatrix} G(t,s_1) & G(t,s_2) \\ G(\tau,s_1) & G(\tau,s_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(s_1) & x_1(s_2) \\ x_2(s_1) & x_2(s_2) \end{vmatrix} d\sigma(s_1) d\sigma(s_2)$$

дает после деления на $\tau - t$ и предельного перехода при $\tau \to t$

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot x_1(t) & \dot x_2(t) \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \iint\limits_{a < s_1 < s_2 < b} \begin{vmatrix} G(t,s_1) & G(t,s_2) \\ G_1(t,s_1) & G_1(t,s_2) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x_1(s_1) & x_1(s_2) \\ x_2(s_1) & x_2(s_2) \end{vmatrix} d\sigma(s_1)d\sigma(s_2) \tag{12.17}$$

(законность предельного перехода очевидна). Подынтегральное выражение не меняет знака; кроме того, ввиду (12.15) оно отлично от нуля при $a < s_1 < t < s_2 < b, s_1, s_2 \in I_\sigma$. Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} > 0 \tag{12.18}$$

при любом t, справа и слева от которого есть точки роста σ.

Последнему условию удовлетворяет, в частности, любой нуль $x_i(t)$ в (a, b). Действительно, как уже отмечалось, в п. 10 (см. (10.2)), $S(x_i, I_\sigma) = S(x_i)$, так что x_i не имеет узлов справа или слева от I_σ; нулей же, отличных от узлов, у x_i в (a, b) нет.

При $i = 2$ простота нуля $x_2(t)$ в (a, b) сразу вытекает поэтому из (12.18). Для $i > 2$ будем рассуждать от противного. Пусть x_i имеет кратный нуль $t' \in (a, b)$, т. е. $x_i(t') = \dot{x}_i(t') = 0$. Рассмотрим функцию

$$x(t, \varepsilon) = x_i(t) - \varepsilon y(t), \text{ где } y(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(t') & x_2(t') \end{vmatrix}.$$

Нуль $y(t)$ в точке t' является в силу (12.18) простым, так что $x_i(t)/y(t) \to 0$ при $t \to t'$. Пусть знак ε таков, что $\varepsilon x_i(t)y(t) > 0$ при t ($\neq t'$), близких к t'. Если к тому же $|\varepsilon|$ достаточно мало, то, как легко видеть, $x(t, \varepsilon)$ имеет в (a, b) не менее $i + 1$ перемен знака. Полученное противоречие с 3° доказывает простоту нулей x_i в (a, b). Теорема 6 доказана.

13. Данный пункт посвящен замечаниям и дополнениям к теореме 6.

Замечание 4. *Наряду с соображениями общего характера в доказательстве очевидно использовалась и специфика интегральных операторов, обратных к дифференциальным. Так, установленная для них импликация «неповышение числа перемен знака → простота спектра (ненулевого)» не имеет места для произвольных вполне непрерывных операторов. Тривиальным примером служит единичный оператор в конечномерном пространстве; аналогичные примеры интегральных операторов также строятся без труда.*

Замечание 5. *В теореме предполагалось, что $r(t)$ суммируема. Для приложений интересен и случай, когда $r(t)$ есть обобщенная функция импульсного типа (например, если речь идет о колебании струны с сосредоточенными массами). К первой части теоремы 6 вид $r(t)$ не имеет отношения. Влияние же на вторую часть сводится к тому, что при*

r, являющейся линейной комбинацией конечного числа дельта-функций, спектр задачи становится конечным (теорема 4, 1°); напомним, что теорема 4 не предполагала абсолютной непрерывности или непрерывности $\sigma(t)$.

Замечание 6. *Свойство 3) (т. е. сильная знакорегулярность G в $I_1 \times I_2$) послужило основой для характеристики спектральных свойств, однако оно, конечно, не исчерпывает всех свойств G, вытекающих из знакорегулярности G. Фактически уже теорема 5 дает некоторую информацию, не содержащуюся в 3). Далее, наряду с минорами функции Грина можно рассматривать определители из частных производных $G(t, s)$, возникающие в результате предельного перехода при слиянии нескольких t_i или s_i. Одно неравенство подобного вида, а именно* (12.15), *применялось при доказательстве теоремы 6. Не останавливаясь на этом подробнее, отметим, что при общем рассмотрении вопроса здесь необходимо считаться с ограниченным запасом гладкости G; соответствующие рассмотрения для некоторых классов задач имеются у С. Карлина [3], [6].*

Замечание 7. *В теореме 6 ничего не говорилось о знаках собственных значений, поскольку здесь возможны различные случаи. Однако в асимптотическом плане вопрос решается определенно: все λ_i, начиная с некоторого, совпадают по знаку с $(-1)^{n-m}$. Хотя вопросы асимптотики не являются предметом данной работы, остановимся на этом несколько подробнее, причем для удобства ссылок на известные результаты (М. В. Келдыш [7], А. П. Хромов [8]) ограничимся случаем достаточно гладких коэффициентов: $p_i(t) \in C^{n-i}[a, b], i = 1, \ldots, n$. Тогда для $r(t) \equiv 1$, как известно,*

$$\lambda_k \sim (-1)^{n-m} c k^n \quad (c > 0; k \to \infty), \tag{13.1}$$

где c зависит лишь от краевых условий. Соотношение (13.1) *распространяется на случай гладкой $r(t) > 0$ с помощью стандартной замены переменной [9] (в этом случае c в* (13.1) *зависит и от r.) Однако нули $r(t)$, как известно, сильно осложняют исследование асимптотики, так что наши предположения $r \geqslant 0, r \in L_1$ являются слишком общими для получения аналога* (13.1). *Эта трудность преодолевается с помощью следующего простого соображения: при условии 3) применима теорема 4; поэтому, согласно теореме 4, 1°, знаки λ_i однозначно определяются числами ε_i, которые, как и сама функция Грина, очевидно не зависят от r. Итак, в условиях теоремы 6 (т. е. при выполнении любого из соотношений 1)—3)) знаки всех собственных значений не зависят от $r(t)$ ($\geqslant 0$). Полагая $r(t) \equiv 1$ и учитывая* (13.1), *получаем, что может существовать лишь конечное число λ_i, отличных по знаку от $(-1)^{n-m}$.*

Удовлетворительную оценку числа таких λ_i на этом пути получить, по-видимому, трудно.

Как будет видно из дальнейшего, более точная информация о таких λ_i часто может быть получена на основе совершенно иных соображений — с помощью теоремы 2, б).

Замечание 8. *В силу сказанного переход к оператору $L^{'}x = Lx+$ $+(-1)^{n-m}\mu x$ при достаточно большом μ обеспечивает одинаковый знак у всех собственных значений краевой задачи $L^{'}x = \lambda r(t)x$ при условиях* (12.2). *Возникает естественный вопрос: не обеспечивает ли такая «сдвижка параметра» осцилляционность с точностью до множителя $(-1)^{n-m}$ соответствующей функции Грина $G^{'}(t,s)$? Положительный ответ на этот вопрос для уравнений второго порядка дан Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном [10]. Таким образом, при $n = 2$ «зазор» между классами знакорегулярных и осцилляционных функций Грина не слишком велик: знакорегулярность $G(t,s) = R(t,s,0)$ (R — резольвентное ядро оператора L при заданных краевых условиях) влечет за собой осцилляционность $-R(t,s,\mu)$ при достаточно больших μ. В общем случае ответ отрицателен: при $n > 2$ и достаточно больших по модулю μ (любого знака) $R(t,s,\mu)$ заведомо не может быть даже знакорегулярной. На обосновании этого «негативного» факта подробнее не останавливаемся; отметим лишь, что он свидетельствует о неправомерности импликаций типа* $\mathrm{C} \to \mathrm{A}, \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ *(см. п. 1).*

14. В теореме 6 дана характеристика связей между различными свойствами краевой задачи, однако не указаны пути проверки выполнения какого-либо из этих свойств. Дальнейшая часть работы посвящена способам такой проверки.

Наименьшие сложности возникают, если оператор и краевые условия заданы в следующей специфической форме:

$$Lx (= D_n x) \equiv r_0 \frac{d}{dt} r_1 \frac{d}{dt} \dots r_{n-1} \frac{d}{dt} r_n x, \tag{14.1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} (D_{k-1}x)(a) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} (D_{k-1}x)(b) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-m. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Здесь $r_0(t), \dots, r_n(t)$ — положительные и достаточно гладкие функции. Операции в (14.1) производятся справа налево; операторы D_i определяются соотношениями

$$D_0x = x,\ D_kx = \frac{d}{dt}(r_{n-k+1}D_{k-1}x) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Если краевые условия являются неособыми для L, то функцию Грина, как и ранее, будем обозначать через $G(t, s)$.

Известные до последнего времени достаточные условия знакорегулярности функции Грина (для уравнений произвольного порядка) относились к задаче в форме (14.1)—(14.2). Эти условия даются двумя предложениями. Первое относится к более частным, чем (14.2), краевым условиям

$$x(a) = \dot{x}(a) = \dots = x^{(m-1)}(a) = x(b) = \dot{x}(b) = \dots = x^{(n-m-1)}(b) = 0. \tag{14.3}$$

Теорема 7 (Крейн). *Пусть факторизация* (14.1) *имеет место внутри интервала* (a, b)*, причем* r_k k*-кратно непрерывно дифференцируемы внутри* (a, b)*. Если при некотором* m $(1 \leqslant m \leqslant n{-}1)$ *краевые условия* (14.3) *являются неособыми для L, то* $(-1)^{n-m}G(t, s)$ *— осцилляционное ядро.*

Данный результат сформулирован М. Г. Крейном в [5]; подробное обоснование его, видимо, не излагалось. Поскольку мы располагаем теоремами 2 и 6, это обоснование не представляет трудностей. Пусть вначале (14.1) выполнено в замкнутом промежутке $[a, b]$ и $r_k \in C^k[a, b]$. Очевидные соображения типа теоремы Ролля показывают, что для оператора (14.1) при условиях (14.3) $S(Lx) \geqslant S(x)$ для всех $x \in \mathcal{D}$ и равенство здесь возможно лишь при $\operatorname{sign}_1 Lx = (-1)^{n-m} \operatorname{sign}_1 x$ $(x \not\equiv 0)$. Непонижение числа перемен знака влечет за собой, согласно теореме 6, сильную знакорегулярность G в $(a, b)^2$, а связь между $\operatorname{sign}_1 x, \operatorname{sign}_1 Lx$ показывает, согласно теореме 2, что

$$(-1)^{n-m}\varepsilon_i(G)\varepsilon_{i+1}(G) > 0, \quad i = 0, 1, \dots,$$

т. е. ядро $(-1)^{n-m}G$ осцилляционно. Отметим, кстати, что в этом случае условия (14.3) заведомо являются неособыми [11].

Пусть теперь (14.1) выполнено лишь внутри (a, b); докажем требуемое утверждение от противного. Допустим, что ядро $H = (-1)^{n-m}G$ не является осцилляционным; это значит, что для некоторого натурального k найдутся $t_1, \dots, t_k$, $s_1, \dots, s_k$ такие, что $a < t_1 < \dots < t_k < b$, $a < s_1 < \dots < s_k < b$ и

$$\det \|H(t_i, s_j)\|_1^k < 0. \tag{14.4}$$

Пусть $G_\varepsilon(t, s)$ — функция Грина для оператора L при краевых условиях

$$x(a + \varepsilon) = \dots = x^{(m-1)}(a + \varepsilon) = x(b - \varepsilon) = \dots = x^{(n-m-1)}(b - \varepsilon) = 0$$

и $H_\varepsilon(t,\varepsilon) = (-1)^{n-m} G_\varepsilon(t,s)$. Так как исходная задача по предположению неособая, то $H_\varepsilon(t,s)$ определена и непрерывна по ε при достаточно малых $|\varepsilon|$. Отсюда и из неравенства (14.4), вытекает, что при достаточно малом $|\varepsilon|$

$$\det \|H_\varepsilon(t_i,s_j)\|_1^k < 0. \tag{14.5}$$

С другой стороны, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ факторизация (14.1) имеет место на замкнутом промежутке $[a+\varepsilon, b—\varepsilon]$, содержащем все точки t_i, s_i $(i = 1,\ldots,k)$. На основании сказанного выше ядро H_ε должно быть осцилляционным, что противоречит (14.5) и завершает доказательство.

Отметим, что случай, когда факторизация (14.1) может быть осуществлена внутри (a,b), но не на замкнутом промежутке $[a,b]$, означает сопряженность точек a и b в смысле теории неосцилляции [12], [13]. Отсюда, в частности, вытекает, что хотя бы при одном m условия (14.3) заведомо являются особыми; в то же время при других m задача, разумеется, может быть неособой (если $n > 2$).

Теорема 8 (Калафати—Гантмахер—Крейн). *Пусть факторизация* (14.1) *имеет место в* $[a,b]$ *с* $r_i(t) \in C^i[a,b]$ $(i = 0,\ldots,n)$ *и условия* (14.2) *являются неособыми для оператора* L. *Если все отличные от нуля миноры* m*-го порядка матрицы*

$$A = \|(-1)^k \alpha_{ik}\| \quad (i = 1,\ldots,m;\ k = 1,\ldots,n)$$

имеют одинаковые знаки и то же справедливо для миноров $(n-m)$*-го порядка матрицы*

$$B = \|\beta_{ik}\| \quad (i = 1,\ldots,n-m;\ k = 1,\ldots,n),$$

то $(-1)^{n-m}G(t,s)$ *является осцилляционным ядром.*

Это утверждение (в несколько усложненной формулировке) доказал П. Д. Калафати [4], отметивший, что одновременно к тому же результату пришли Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн. Позднее аналогичный результат был получен также Дж. Кароном [14] (частично) и С. Карлином [6] (в полном виде). Методы работ [4], [6] близки и связаны с довольно громоздкими выкладками. Применение общих теорем 2 и 6 позволяет значительно упростить доказательство; подробнее на этом не останавливаемся.

Отметим, что получение факторизации (14.1) в явном виде предполагает знание решений уравнения $Lx = 0$. Необходимое и достаточное условие осцилляционности ядра $(-1)^{n-m}G(t,s)$ в терминах поведения решений уравнения $Lx = 0$ найдено недавно одним из авторов [15].

15. Если краевая задача задана в обычной форме (12.1)—(12.2), то результаты предыдущего пункта не могут быть непосредственно применены. Вопрос об условиях, при которых задачу из обычной формы можно преобразовать к форме (14.1)—(14.2), сам по себе весьма нетривиален (за исключением некоторых простейших случаев).

Ниже будет развит иной подход, не связанный с факторизацией оператора и краевых условий и не требующий знания решений уравнения $Lx = 0$. Для довольно широкого класса задач на этом пути будут получены эффективные «коэффициентные» условия знакорегулярности функции Грина с вытекающими отсюда, согласно теореме 6, следствиями.

Обозначим через n_k количество краевых условий (12.2), в которых порядок старшей из производных не превосходит k. Положим также $h = 2(b-a)$.

Следующее предложение послужит основным инструментом.

Лемма 10. *Пусть для задачи* (12.1)—(12.2) *выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{n} h^{k-1} \int_a^b |p_k(t)| dt < 1/2, \tag{15.1}$$

$$\sum_{k<k_i} |\gamma_{ik}| h^{k_i-k} < 1/2 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{15.2}$$

Тогда для каждой функции $x(t) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющей условию

$$S(x) > \max_{0 \leqslant k \leqslant n-2} \{k - n_k\}, \tag{15.3}$$

имеет место неравенство

$$S(Lx) \geqslant S(x). \tag{15.4}$$

Если же сверх того в (15.4) *имеет место равенство (при $0 \leqslant S(x) < \infty$), то*

$$\operatorname{sign}_1 Lx = (-1)^{n-m} \operatorname{sign}_1 x. \tag{15.5}$$

Для доказательства (15.4) при $S(x) = \infty$ отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется промежуток $J \subset [a, b]$ длины $< \varepsilon$ такой, что $S(x, J) = \infty$. С другой стороны, при малых ε промежуток J должен быть промежутком неосцилляции для L (т. е. нетривиальные решения уравнения $Lx = 0$ имеют в J менее n нулей [13], [16]). Тогда, согласно теореме Пойа [11], L допускает в J представление (14.1), откуда, ввиду $S(x, J) = \infty$ и соображений типа теоремы Ролля, получаем (15.4).

Переходим к основному случаю $S(x) < \infty$. Без ограничения общности можно очевидно считать, что $x(t) \not\equiv 0$. Итак, пусть $x(t)$ — произвольная функция из $\mathcal{D}$ такая, что $0 \leqslant S(x) < \infty$, и выполнено условие (15.3). Далее для $x(t)$ при $k = 0, \ldots, n-1$ мы определим числа $s(k)$ и построим наборы точек

$$t_0^k, t_1^k, \ldots, t_{s(k)}^k \quad (a \leqslant t_0^k < \ldots < t_{s(k)}^k \leqslant b) \tag{15.6}$$

так, что из свойств этих наборов и условий теоремы будет следовать (15.4).

Через $\alpha(k), \beta(k)$ будем обозначать количество краевых условий (14.2) со старшей производной $x^{(k)}(a), x^{(k)}(b)$ соответственно. Очевидно

$$n_0 = \alpha(0) + \beta(0), \quad n_i = n_{i-1} + \alpha(i) + \beta(i). \tag{15.7}$$

Построение чисел $s(k)$ и наборов (15.6) будет проводиться по индукции. Положим $s(0) = S(x)$. Если $s(0) = 0$, обозначим через t_0^0 точку максимума $|x(t)|$ на $[a, b]$. (Здесь и далее имеются в виду глобальные максимумы; если точек, в которых достигается максимум, несколько, выбирается любая из них.) Если $s(0) > 0$, то в $[a, b]$ найдутся точки $t_0 < \ldots < t_{s(0)}$ такие, что $x(t_i)x(t_{i+1}) < 0$, $i = 0, \ldots, s(0) - 1$. В качестве t_i^0 выберем точку максимума $x(t) \operatorname{sign} x(t_i)$ на промежутке $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, s(0))$, где $t_{-1} = a, t_{s(0)+1} = b$.

Нетрудно видеть, что $(a \leqslant) t_0^0 < t_1^0 < \ldots < t_{s(0)}^0 (\leqslant b)$ и при $k = 0$ имеют место следующие соотношения:

$\mathrm{I_k}$)	$x^{(k)}(t_i^k)x^{(k)}(t_{i-1}^k) < 0$	при $s(k) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, s(k)$;
$\mathrm{II_k}$)	$\lvert x^{(i)}(t)\rvert \leqslant h^{k-i}\lvert x^{(k)}(t_0^k)\rvert$	при $a \leqslant t \leqslant t_0^i,\ 0 \leqslant i \leqslant k$,
	$\lvert x^{(i)}(t)\rvert \leqslant h^{k-i}\lvert x^{(k)}(t_{s(k)}^k)\rvert$	при $t_{s(i)}^i \leqslant t \leqslant b,\ 0 \leqslant i \leqslant k$;
$\mathrm{III_k}$)	$\alpha(k) = 1 \to \lvert x^{(k)}(a)\rvert < \lvert x^{(k)}(t_0^k)\rvert/2$,	
	$\beta(k) = 1 \to \lvert x^{(k)}(b)\rvert < \lvert x^{(k)}(t_{s(k)}^k)\rvert/2$;	
$\mathrm{IV_k}$)	$s(k) + \alpha(k) + \beta(k) \geqslant S(x) + n_k - k$.	

(Соотношение $\mathrm{IV_0}$ следует из определения $s(0)$ и (15.7)).

Перейдем к определению $s(k)$ и наборов (15.6) при $k > 0$.

Предположим, что при $i = 0, 1, \ldots, k{-}1$ уже определены $s(i)$ и наборы $t_0^i, \ldots, t_{s(i)}^i$ $(a \leqslant t_0^i < \ldots < t_{s(i)}^i \leqslant b)$, удовлетворяющие условиям $\mathrm{I_i}$ – $\mathrm{VI_i}$. Ввиду $\mathrm{IV_{k-1}}$ и (15.3),

$$s(k-1) + \alpha(k-1) + \beta(k-1) \geqslant 1. \tag{15.8}$$

Определение $s(k)$ и набора (15.6) находится в зависимости от того, имеет ли в (15.8) место равенство или нет. Рассмотрим эти случаи отдельно друг от друга.

А. Рассмотрим сначала случай строгого неравенства в (15.8).

В этом случае $1{-}\alpha(k{-}1) \leqslant s(k{-}1){-}1 + \beta(k-1)$, а значит, $(\tau_a =)$ $t_{1-\alpha(k-1)}^{k-1} \leqslant t_{s(k-1)-1+\beta(k-1)}^{k-1}$ $(= \tau_b)$. Обозначим через θ_k точку максимума функции $x^{(k)}(t)\operatorname{sign}x^{(k-1)}(\tau_a)$ на $[a,\tau_a]$, а через η_k — точку максимума $-x^{(k)}(t)\operatorname{sign}x^{(k-1)}(\tau_b)$ на $[\tau_b,b]$. (Отметим, что эти максимумы, ввиду $\mathrm{III_{k-1}}$ и $\mathrm{I_{k-1}}$, отличны от нуля.)

Если теперь выполнены равенства

$$\max_{a\leqslant t\leqslant\theta_k}|x^{(k)}(t)|=|x^{(k)}(\theta_k)|, \tag{15.9}$$

$$\max_{\eta_k\leqslant t\leqslant b}|x^{(k)}(t)|=|x^{(k)}(\eta_k)|, \tag{15.10}$$

то положим $s(k)=s(k-1)+\alpha(k-1)+\beta(k-1)-1$; если выполнено только одно из них, то положим $s(k)=s(k-1)+\alpha(k-1)+\beta(k-1)$; если же ни одно из равенств (15.9), (15.10) не выполнено, то положим $s(k)=s(k-1)+{}$ $+\alpha(k-1)+\beta(k-1)+1$.

Далее, если выполнено (15.9), то положим $t_0^k=\theta_k$, в противном же случае положим $t_1^k=\theta_k$, а через t_0^k обозначим точку максимума $|x^{(k)}(t)|$ на $[a,\theta_k]$, Если $1-\alpha(k-1)<s(k-1)-1+\beta(k-1)$, то при каждом $j=1-{}$ $-\alpha(k-1),2-\alpha(k-1),\ldots,s(k-1)-2+\beta(k-1)$ какую-либо точку максимума $x^{(k)}(t)\operatorname{sign}x^{(k-1)}(t_{j+1}^{k-1})$ на $[t_j^{k-1},t_{j+1}^{k-1}]$ обозначим через $t_{j+\alpha(k-1)}^k$, когда (15.9) выполнено, и через $t_{j+\alpha(k-1)+1}^k$ когда (15.9) не выполнено. Наконец, если выполнено (15.10), то положим $t_{s(k)}^k=\eta_k$, в противном случае положим $t_{s(k)-1}^k=\eta_k$, а через $t_{s(k)}^k$ обозначим точку максимума $|x^{(k)}(t)|$ на $[\eta_k,b]$.

Легко видеть, что построенный набор точек удовлетворяет неравенствам $(a\leqslant)t_0^k<t_1^k<\ldots<t_{s(k)}^{(k)}(\leqslant b)$. Проверим справедливость условий $\mathrm{I_k}$–$\mathrm{IV_k}$, обеспечивающих саму возможность построения подобных наборов.

Условие $\mathrm{I_k}$ вытекает непосредственно из построений, поэтому начнем с $\mathrm{II_k}$. Прежде всего отметим, что по определению точек $t_0^k,t_{s(k)}^k$ имеем

$$|x^{(k)}(t)|\leqslant|x^{(k)}(t_0^k)|\quad(a\leqslant t\leqslant t_0^k),$$

$$|x^{(k)}(t)|\leqslant|x^{(k)}(t_{s(k)}^k)|\quad(t_{s(k)}^k\leqslant t\leqslant b). \tag{15.11}$$

Докажем неравенство

$$|x^{(k-1)}(t)|<h|x^{(k)}(\theta_k)|\quad(a\leqslant t\leqslant t_{1-\alpha(k-1)}^{k-1}), \tag{15.12}$$

которое понадобится нам не только для проверки $\mathrm{II_k}$, но и для других целей. В случае $\alpha(k-1)=0$ из очевидного, ввиду $\mathrm{I_{k-1}}$, неравенства

$$\max_{t_i^{k-1}\leqslant t\leqslant t_{i+1}^{k-1}}|x^{(k-1)}(t)|\leqslant$$

$$\leqslant(t_{i+1}^{k-1}-t_i^{k-1})\max_{t_i^{k-1}\leqslant t\leqslant t_{i+1}^{k-1}}[x^{(k)}(t)\operatorname{sign}x^{(k-1)}(t_{i+1}^{k-1})] \tag{15.13}$$

и определения θ_k следует, что $|x^{(k-1)}(t)| < h|x^{(k)}(\theta_k)|$ $(t_0^{k-1} \leqslant t \leqslant t_1^{k-1})$. Отсюда и из $\mathrm{II_{k-1}}$ следует (15.12) при $\alpha(k—1) = 0$.

В случае $\alpha(k—1) = 1$ (15.12) следует из легко проверяемого неравенства

$$|x^{(k-1)}(t_0^{k-1})| \leqslant |x^{(k-1)}(a)| + \frac{h}{2} \max_{a \leqslant t \leqslant t_0^{k-1}} [x^{(k)}(t) \operatorname{sign} x^{(k-1)}(t_0^{k-1})]$$

с учетом $\mathrm{III_{k-1}}, \mathrm{II_{k-1}}$ и определения θ_k.

Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$|x^{(k-1)}(t)| < h|x^{(k)}(\eta_k)| \quad (t^{k-1}_{s(k-1)-1+\beta(k-1)} \leqslant t \leqslant b). \tag{15.14}$$

Из (15.12), (15.14) и определения $t_0^k, t_{s(k)}^k$ следует, что $|x^{(k-1)}(t)| \leqslant \leqslant h|x^{(k)}(t_0^k)|$ $(a \leqslant t \leqslant t_0^{k-1})$, $|x^{(k-1)}(t)| \leqslant h|x^{(k)}(t_{s(k)}^k)|$ $(t_{s(k-1)}^{k-1} \leqslant t \leqslant b)$, откуда с учетом (15.11) и $\mathrm{II_{k-1}}$ получаем $\mathrm{II_k}$.

Для доказательства $\mathrm{III_k}$ отметим, что равенство $\alpha(k) = 1$ означает существование среди краевых условий (12.2) условия вида

$$x^{(k)}(a) + \sum_{i<k} \gamma_{ji} x^{(i)}(a) = 0.$$

Отсюда, используя $\mathrm{II_k}$, получаем

$$|x^{(k)}(a)| \leqslant |x^{(k)}(t_0^k)| \sum_{i<k} |\gamma_{ji}| h^{k-i}.$$

Из этого неравенства, ввиду (15.2), следует первая из импликаций $\mathrm{III_k}$. Аналогично устанавливается и вторая из импликаций $\mathrm{III_k}$.

Из определения $s(k)$ следует, что

$$s(k) \geqslant s(k-1) + \alpha(k-1) + \beta(k-1) - 1. \tag{15.15}$$

Из (15.15), $\mathrm{IV_{k-1}}$ и (15.7) очевидным образом вытекает $\mathrm{IV_k}$.

Проверка условий $\mathrm{I_k}$–$\mathrm{IV_k}$ в случае А завершена.

В. Рассмотрим теперь случай равенства в (15.8).

В этом случае одно из чисел $s(k—1), \alpha(k—1), \beta(k—1)$ равно 1, а два других равны нулю. Обозначим через ξ_k точку из $[a,b]$, в которой $(-1)^{\alpha(k-1)+1} x^{(k)}(t) \operatorname{sign} x^{(k-1)}(t_0^{k-1})$ принимает максимальное значение (ввиду $\mathrm{I_{k-1}}, \mathrm{III_{k-1}}$ оно отлично от нуля). Если справедливы равенства

$$\max_{a \leqslant t \leqslant \xi_k} |x^{(k)}(t)| = |x^{(k)}(\xi_k)|, \tag{15.16}$$

$$\max_{\xi_k \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)| = |x^{(k)}(\xi_k)|, \tag{15.17}$$

то положим $s(k) = 0$, если справедливо только одно из них, то положим $s(k) = 1$, если же ни одно из равенств (15.16), (15.17) не выполнено, то положим $s(k) = 2$.

Далее, если выполнено (15.16), то полагаем $t_0^k = \xi_k$, в противном же случае положим $t_1^k = \xi_k$, а через t_0^k обозначим точку максимума $|x^{(k)}(t)|$ на $[a, \xi_k]$. Наконец, если выполнено (15.17), то полагаем $t_{s(k)}^k = \xi_k$, в противном случае полагаем $t_{s(k)-1}^k = \xi_k$, а в качестве $t_{s(k)}^k$ возьмем точку максимума $|x^{(k)}(t)|$ на $[\xi_k, b]$.

Очевидно, что $(a \leqslant) t_0^k < \ldots < t_{s(k)}^k (\leqslant b)$ (при $s(k) > 0$).

Условия $\mathrm{I_k}$–$\mathrm{IV_k}$ устанавливаются в случае B почти так же, как и в случае A. Небольшое отличие имеется лишь при проверке $\mathrm{II_k}$: в случае B вместо (15.12), (15.14) используется неравенство

$$|x^{(k-1)}(t)| \leqslant h|x^{(k)}(\xi_k)| \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{15.18}$$

Если $s(k) = 1$, то $\alpha(k-1) = \beta(k-1) = 0$ и (15.18) доказывается так же, как доказывалось (15.12) при $\alpha(k—1) = 0$ (естественно, с заменой θ_k на ξ_k).

Если $s(k) = 0$, то либо $\alpha(k-1)$, либо $\beta(k-1)$ равно 1 и (15.18) доказывается так же, как доказывалось (15.12) при $\alpha(k-1) = 1$.

Проверка условий $\mathrm{I_k}, \mathrm{III_k}, \mathrm{IV_k}$ в случае B ничем не отличается от случая A.

Итак, построенный набор (15.16) и в случае A, и в случае B удовлетворяет условиям $\mathrm{I_k}$–$\mathrm{IV_k}$. Таким образом, наши построения корректны при всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Будем при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ полагать $t_{-1}^k = a, t_{s(k)+1}^k = b$. Покажем, что если при некотором k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ два отрезка $[t_i^{k-1}, t_{i+1}^{k-1}]$ и $[t_r^k, t_{r+1}^k]$ $(-1 \leqslant i \leqslant s(k-1), -1 \leqslant r \leqslant s(k))$ имеют общие точки, то

$$\max_{t_i^{k-1} \leqslant t \leqslant t_{i+1}^{k-1}} \{|x^{(k-1)}(t)|\} \leqslant h \max\{|x^{(k)}(t_r^k)|, |x^{(k)}(t_{r+1}^k)|\}. \tag{15.19}$$

В случае B это вытекает из (15.18) и определения точек $t_0^k, \ldots, t_{s(k)}^k$.

Пусть имеет место случай A. Если $-1 \leqslant i \leqslant -\alpha(k-1)$, то по определению наборов (15.16) одна из точек t_r^k, t_{r+1}^k совпадает либо с θ_k, либо с t_0^k. Тогда (15.19) следует из (15.12) и определения t_0^k. Аналогично (15.19) проверяется при $s(k-1) - 1 + \alpha(k-1) \leqslant i \leqslant s(k-1)$. Если $-\alpha(k-1) < < i < s(k-1) - 1 - \beta(k-1)$, то либо t_r^k, либо t_{r+1}^k принадлежит $[t_i^{k-1}, t_{i+1}^{k-1}]$ и тогда (15.19) вытекает из (15.13).

Из доказанного соотношения (15.19) следует, в частности, что при $k = = 0, \ldots, n-2$

$$\max_{t_i^{n-1} \leqslant t \leqslant t_{i+1}^{n-1}} \{|x^{(k)}(t)|\} \leqslant h^{n-1-k} \max\{|x^{(n-1)}(t_i^{n-1})|, |x^{(n-1)}(t_{i+1}^{n-1})|\}. \tag{15.20}$$

Докажем теперь, что

$$S(Lx) \geqslant s(n—1) + \alpha(n—1) + \beta(n—1) - 1 \tag{15.21}$$

и равенство возможно лишь при

$$(-1)^{\alpha(n-1)} x^{(n-1)}(t_0^{n-1}) \operatorname{sign}_1 Lx < 0. \tag{15.22}$$

Очевидно, для этого достаточно показать, что

$$(-1)^i Lx(t) \operatorname{sign} x^{(n-1)}(t_0^{n-1}) > 0 \tag{15.23}$$

на некотором множестве ненулевой меры в $[t_{i-1}^{n-1}, t_i^{n-1}]$ при каждом $i = 1, \ldots, s(n-1)$, а также при $i = 0$, если $\alpha(n-1) = 1$, и при $i = s(n-1)+1$, если $\beta(n-1) = 1$.

Доказательство последнего будем вести методом «от противного». Пусть вначале для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant s(n-1))$ почти всюду на $[t_{i-1}^{n-1}, t_i^{n-1}]$

$$(-1)^i Lx(t) \operatorname{sign} x^{(n-1)}(t_0^{n-1}) \leqslant 0. \tag{15.24}$$

Тогда почти всюду на $[t_{i-1}^{n-1}, t_i^{n-1}]$

$$x^{(n)}(t) \operatorname{sign} x^{(n-1)}(t_i^{n-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |p_k(t)||x^{n-k}(t)|. \tag{15.25}$$

Пусть $t^{'}$ — первый нуль $x^{(n-1)}(t)$ справа от t_{i-1}^{n-1}, $t^{''}$ — первый нуль $x^{(n-1)}(t)$ слева от t_i^{n-1}. Из определения точек $t_0^{n-1}, t_1^{n-1}, \ldots, t_{s(n-1)}^{n-1}$ ясно, что

$$|x^{(n-1)}(t)| \leqslant |x^{(n-1)}(t_{i-1}^{n-1})| \text{ при } t \in [t_{i-1}^{n-1}, t^{'}],$$

$$|x^{(n-1)}(t)| \leqslant |x^{(n-1)}(t_i^{n-1})| \text{ при } t \in [t^{''}, t_i^{n-1}].$$

Отсюда и из (15.20), (15.25) следует, что при $t \in [t_{i-1}^{n-1}, t^{'}] \cup [t^{''}, t_i^{n-1}]$

$$x^{(n)}(t) \operatorname{sign} x^{(n-1)}(t_i^{n-1}) \leqslant \max\left\{|x^{(n-1)}(t_{i-1}^{n-1})|, |x^{(n-1)}(t_i^{n-1})|\right\} \sum_{k=1}^{n} h^{k-1}|p_k(t)|.$$

Интегрируя левую часть по $[t_{i-1}^{n-1}, t^{'}] \cup [t^{''}, t_i^{n-1}]$, а правую часть по $[a, b]$, получим неравенство

$$|x^{(n-1)}(t_i^{n-1})| + |x^{(n-1)}(t_{i-1}^{n-1})| \leqslant \max\left\{|x^{(n-1)}(t_{i-1}^{n-1})|, |x^{(n-1)}(t_i^{n-1})|\right\} \times \\ \times \sum_{k=1}^{n} h^{k-1} \int_a^b |p_k(t)| dt,$$

которое противоречит (15.1). Таким образом, при $i = 1, \ldots, s(n-1)$ (15.24) не может выполняться почти всюду на $[t_{i-1}^{n-1}, t_i^{n-1}]$.

Предположим теперь, что $\alpha(n-1)=1$ и (15.24) (а значит, и (15.25)) выполнено почти всюду на $[a,t_0^{n-1}]$. Тогда из $\mathrm{II}_{\mathrm{n}-1}$, (15.20) и (15.25) получаем, что почти всюду на $[a,t_0^{n-1}]$

$$x^{(n)}(t)\operatorname{sign}x^{(n-1)}(t_0^{n-1})\leqslant|x^{(n-1)}(t_0^{n-1})(t_0^{n-1})|\sum_{k=1}^{n}h^{k-1}|p_k(t)|.$$

Отсюда

$$|x^{(n-1)}(t_0^{n-1})|-|x^{(n-1)}(a)|\leqslant|x^{(n-1)}(t_0^{n-1})|\sum_{k=1}^{n}h^{k-1}\int\limits_a^b|p_k(t)|dt$$

и, ввиду $\mathrm{III}_{\mathrm{n}-1}$,

$$\frac{1}{2}|x^{(n-1)}(t_0^{n-1})|<|x^{(n-1)}(t_0^{n-1})|\sum_{k=1}^{n}h^{k-1}\int\limits_a^b|p_k(t)|dt$$

что опять-таки противоречит (15.1).

Аналогично рассматривается случай $\beta(n-1)=1$. Таким образом, (15.23) имеет место на некоторых множествах ненулевой меры в $[t_{i-1}^{n-1},t_i^{n-1}]$ при каждом $i=1,2,\ldots,s(n-1)$, а также при $i=0$, если $\alpha(n-1)=1$, и при $i=s(n-1)+1$, если $\beta(n-1)=1$. Следовательно, имеет место (15.21), причем равенство в (15.21) возможно лишь при выполнении (15.22).

Из соотношения $\mathrm{IV}_{\mathrm{n}-1}$ и определения n_k следует, что

$$s(n-1)\geqslant S(x)-\alpha(n-1)-\beta(n-1)+1. \tag{15.26}$$

Само неравенство $\mathrm{IV}_{\mathrm{n}-1}$ выводилось как следствие (15.15), так что равенство в (15.26) возможно лишь в случае равенства в (15.15) при всех $k= =1,2,\ldots,n-1$. С другой стороны, из определения $s(k)$ и t_0^k следует, что равенство в (15.15) возможно лишь при $(-1)^{\alpha(k-1)}x^{(k-1)}(t_0^{k-1})x^{(k)}(t_0^k)<0$. Отсюда нетрудно заключить, что равенство в (15.26) возможно лишь при

$$(-1)^{n-m-\alpha(n-1)}x(t_0^0)x^{(n-1)}(t_0^{n-1})<0. \tag{15.27}$$

Из неравенств (15.21) и (15.26) следует (15.4), а так как равенство в (15.21) возможно лишь при (15.22), а в (15.26) лишь при (15.27), то равенство в (15.4) возможно лишь при (15.5). Лемма 10 доказана.

16. Теперь нетрудно установить следующее предложение.

Теорема 9. *Пусть для задачи* (12.1)—(12.2) *выполнены неравенства* (15.1), (15.2). *Если условия* (12.2) *таковы, что*

$$n_k\geqslant k\quad(k\leqslant n-2), \tag{16.1}$$

то все собственные значения λ_i задачи (12.1)—(12.2) *вещественны,*

$$0 \leqslant |\lambda_1| < (-1)^{n-m}\lambda_2 < (-1)^{n-m}\lambda_3 < (-1)^{n-m}\lambda_4 < \ldots, \tag{16.2}$$

и для собственных функций справедливы утверждения 2°, 3° теоремы 6.

Если вдобавок (16.1) *выполняется в усиленной форме*

$$n_k > k \quad (k = 0, \ldots, n-2), \tag{16.3}$$

то $(-1)^{n-m}\lambda_1 > 0$ *и оператор L при краевых условиях* (12.2) *обладает функцией Грина $G(t, s)$ такой, что $(-1)^{n-m}G$ — осцилляционное ядро.*

Отметим сразу, что при $n = 2, 3$ условие (16.1) выполняется автоматически. Таким образом, теорема показывает, в частности, что для уравнений второго и третьего порядков «в малом» (т. е. при достаточной близости b к a) всегда имеет место соответствующий комплекс свойств. Для уравнений четвертого порядка это, вообще говоря, уже не так. Например, задача

$$x^{(4)} + \dot{x} = \lambda x,$$

$$\ddot{x}(a) + x(a) = \dddot{x}(a) + \dot{x}(a) = \ddot{x}(b) + x(b) = \dddot{x}(b) + \dot{x}(b) = 0$$

при любой близости b к a заведомо имеет два невещественных собственных значения $1 \pm i$ (условие (16.1) здесь не выполнено, так как $n_1 = 0 < 1$).

Доказательство теоремы. Пусть выполнены условия (15.1), (15.2) и (16.1). Предположим сначала, что задача (12.1)—(12.2) является неособой. Тогда оператор L не понижает числа перемен знака на любой функции $x \in \mathcal{D}$: при $S(x) > 0$ это вытекает из леммы 10, а при $S(x) = 0$ — из того, что задача неособая и, следовательно, $S(Lx) \geqslant 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 6. Отсюда следуют сильная знакорегулярность функции Грина, вещественность и простота собственных значений, требуемые свойства собственных функций. Что касается знаков $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$, то для получения (16.2) достаточно сопоставить лемму 10 с теоремами 2 б) и 4.2°.

Пусть теперь $\lambda_1 = 0$ есть собственное значение задачи (12.1)—(12.2). Так как спектр ее состоит из изолированных точек, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ краевая задача, порожденная условиями (12.2) и возмущенным уравнением

$$L_\varepsilon x \equiv Lx + \varepsilon r(t)x = \lambda r(t)x \tag{16.4}$$

будет неособой. Эта задача имеет те же собственные функции, что и исходная, и собственные значения $\lambda_i' = \lambda_i + \varepsilon$. Условия (15.2), (16.1) для новой задачи, конечно, не нарушаются, а при достаточно малом ε сохраняется и (15.1). Таким образом, по доказанному выше собственные функции задачи

(16.4)—(12.2), а следовательно, и задачи (12.1)—(12.2) обладают требуемыми свойствами; кроме того,

$$0<|\lambda_1+\varepsilon|<(-1)^{n-m}(\lambda_2+\varepsilon)<(-1)^{n-m}(\lambda_3+\varepsilon)<\ldots.$$

Ввиду произвольной малости ε отсюда следует (16.2).

Пусть теперь выполнены соотношения (15.1), (15.2), (16.3). Тогда в силу леммы 10 оператор L не понижает числа перемен знака в $\mathcal{D}$ и при $S(Lx) = S(x) \geqslant 0$ выполняется (15.5). В силу теоремы 6 задача (12.1)—(12.2) обладает в этом случае сильно знакорегулярной в $\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2$ функцией Грина $G(t,s)$; осцилляционность $(-1)^{n-m}G(t,s)$ опять-таки обеспечивается теоремами 2 б) и 4.2°. Теорема 9 доказана.

17. Завершим работу несколькими замечаниями. Примененный выше способ перехода от неповышения числа перемен знака к спектральным свойствам проходил, в терминах п. 1, по схеме A $\to$ B $\to$ C или, подробнее, A $\to$ B_1 $\to$ B_2 $\to$ C, где $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ — соответственно знакорегулярность и сильная знакорегулярность функции Грина. Отдельные переходы здесь, в свою очередь, получаются комбинированием различных соображений, так что вся схема не отличается простотой. Было бы интересно выяснить, нет ли более простых путей от A к C, не связанных с интегральным представлением оператора. При этом для получения, скажем, простоты собственных значений должна как-то учитываться специфика операторов, обратных к дифференциальным, тогда как для вещественности спектра, видимо, важна лишь полная непрерывность. Отметим, что одной непрерывности здесь недостаточно. Действительно, непрерывный в $C[0,1]$ вещественный оператор $(\mathbf{K}x)(t) = x(t/2)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ очевидно не повышает числа перемен знака; в то же время спектр его не является вещественным (этот спектр совпадает с единичным кругом).

Результаты типа теоремы 9 могут быть полезны, в частности, при изучении асимптотического поведения решений $u = u(\tau,t)$ уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = q(t)Lu \quad (\tau \geqslant 0, a \leqslant t \leqslant b), \tag{17.1}$$

где q — знакопостоянна, $1/q \in L_1[a,b]$, L — дифференциальный оператор по t вида (11.1). При $t=a, t=b$ на u накладываются краевые условия вида (12.2). При исследовании вопроса об устойчивости, т. е. об ограниченности решений (17.1) при $\tau \to \infty$, в приложениях обычно довольствуются (см., например, [17]) проверкой ограниченности всех решений вида $u(t,\tau) = \varphi(t)\psi(\tau)$ (а следовательно, и их линейных комбинаций). При таком несколько упрощенном определении устойчивость, очевидно, сводится к отрицательности собственных значений задачи

$$Lx = \lambda q^{-1}(t)x \tag{17.2}$$

с краевыми условиями (12.2) и отсутствию присоединенных функций. Если уравнение (17.1) описывает колебания упругой консервативной системы, то задача (17.2)—(12.2) самосопряжена и проверке подлежит лишь положительная определенность оператора $-qL$. В неконсервативном случае задача существенно усложняется ввиду несамосопряженности. В силу теоремы 9 выполнение условий (15.1), (15.2), (16.3) и неравенства $(-1)^{n-m}q < 0$ обеспечивает устойчивость независимо от того, консервативна система или нет. Требование малости промежутка, содержащееся в теореме 9, отражает (для одномерного случая) тот факт, что малые размеры объекта обычно препятствуют возникновению в нем нарастающих колебаний.

Литература

1. *Левин, А. Ю.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I / А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов // *Сиб. матем. журн.* — 1976. — Т. 17, № 3. — С. 606—626.
2. *Крейн, М. Г.* О вполне неотрицательных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / М. Г. Крейн, Г. М. Финкельштейн // *ДАН СССР*. — 1939. — Т. 24, № 3. — С. 220—223.
3. *Karlin, S.* Total positivity / S. Karlin. — Stanford univ. press edition. — 1968. — Vol. 1. — 576 p.
4. *Калафати, П. Д.* О функциях Грина обыкновенных дифференциальных уравнений / П. Д. Калафати // *ДАН СССР*. — 1940. — Т. 26, № 6. — С. 535—539.
5. *Крейн, М. Г.* О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1939. — Т. 25, № 8. — С. 643—646.
6. *Karlin, S.* Total positivity, interpolation by splines, and Green's functions of differential operators / S. Karlin // *J. Approximation Theory*. — 1971. — Vol. 4. — P. 91—112.
7. *Келдыш, М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // *ДАН СССР*. — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11—14.
8. *Хромов, А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями / А. П. Хромов // *Матем. сб.* — 1966. — Т. 70(112), № 3. — С. 310—329.
9. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

10. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.
11. *Polia, G.* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation / G. Polia // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1924. — Vol. 24. — P. 312—324.
12. *Coppel, W. A.* Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220 / W. A. Coppel. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1971. — 147 p.
13. *Левин, А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43—96.
14. *Karon, J. M.* The sign-regularity properties of a class of Green's functions for ordinary differential equations / J. M. Karon // *J. Differ. Equations*. — 1969. — Vol. 6. — P. 484—502.
15. *Степанов, Г. Д.* Критерий осцилляционности функции Грина двухточечной краевой задачи / Г. Д. Степанов // *ДАН СССР*. — 1973. — Т. 213, № 4. — С. 793—794.
16. *Hartman, P.* On disconjugacy criteria / P. Hartman // *Proc. Am. Math. Soc.* — 1970. — Vol. 24. — P. 374—381.
17. *Болотин, В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.

14. О реализуемости стохастического многопродуктового потока[15]

1. Под задачей о реализуемости многопродуктового потока ниже понимается следующее. Дана сеть — ориентированная или неориентированная с узлами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и заданной пропускной способностью α_{ij} каждого канала (A_i, A_j). Из A_i в A_j должно быть перевезено β_{ij} единиц продукта P_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$; $i \neq j$. Требуется проверить возможность реализации этого плана перевозок по данной сети.

Все $n(n-1)$ продуктов P_{ij} предполагаются различными (впрочем, не меняя существа дела, число их можно снизить до n, если отождествить продукты $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{in}$, исходящие из одного узла A_i). Подобная ситуация достаточно характерна, например, для информационных потоков в сетях связи. Приведенная задача, будучи типичной проблемой допустимости, тесно связана, конечно, с различными вариантами оптимизационных задач для многопродуктовых потоков.

Решение задачи о реализуемости в общем виде представляет значительные трудности. В частности, использование аппарата линейного программирования малоэффективно, так как возникает задача размерности Cn^3. Техника, развитая для одно- и двухпродуктовых потоков (см., например, [1, 2]), при большем числе продуктов, как известно, неприменима. Эффективные алгоритмы для ряда частных случаев, когда накладываются специальные ограничения либо на структуру сети, либо на структуру требований, предложены в работах [3, 4]. Общей чертой рассмотренных в [1–4] классов задач является в терминологии [4] их «разрезность», т.е. справедливость аналога теоремы Форда—Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. Как известно (см., например, [2]), в общем случае разрезность не имеет места.

2. В настоящей работе рассматривается рандомизация приведенной выше задачи. Именно, будем считать, что пропускные способности α_{ij} ($\geqslant 0$) — одинаково распределенные случайные величины, объемы перевозок β_{ij} ($\geqslant 0$) — также одинаково распределенные случайные величины и все величины α_{ij}, β_{pq} независимы в совокупности. Конкретный вид распределений величин $\alpha = \alpha_{ij}$ и $\beta = \beta_{ij}$ не имеет значения для дальнейшего; потребуем лишь, чтобы $M\alpha^6 < \infty$, $M\beta^6 < \infty$.

В такой стохастической постановке удается дать легко проверяемый асимптотический критерий реализуемости многопродуктового потока, а также указать (для случая реализуемости) эффективный метод распределения

---

[15] Копылов Г. Н., Левин А. Ю. О реализуемости стохастического многопродуктового потока // ДАН СССР. — 1984. — Т. 276, № 5. — С. 1053—1055. (Представлено академиком Л. В. Канторовичем 13 IV 1983.)

потоков отдельных продуктов, обеспечивающий выполнение плана.

Для ориентированных сетей, т.е. для таких сетей, где каналы (A_i, A_j) и (A_j, A_i) различны, критерий удобно формулировать в терминах распределения величины $\gamma = \alpha - \beta$ (т.е. γ распределена как $\alpha_{ij} - \beta_{ij}$ при любых i, j).

Теорема. *Если*

$$M|\gamma| < 3M\gamma, \tag{1}$$

то с вероятностью, стремящейся к 1 $(n \to \infty)$*, стохастический многопродуктовый поток реализуем.*

Если же

$$M|\gamma| > 3M\gamma, \tag{2}$$

то с вероятностью, стремящейся к 1 $(n \to \infty)$*, стохастический многопродуктовый поток не реализуем.*

Таким образом, теорема дает полный ответ на вопрос об асимптотической реализуемости, за исключением случая $M|\gamma| = 3M\gamma$, когда асимптотическая реализуемость может иметь (сюда относится случай постоянных α_{ij}, β_{ij}) или не иметь места. Здесь и далее термин «асимптотическая» означает, что соответствующая вероятность стремится к 1 при $n \to \infty$.

Аналогичный критерий справедлив и для неориентированных сетей, в которых канал, соединяющий произвольную пару вершин (A_i, A_j), единствен (и его пропускная способность α_{ij} является верхней границей для суммарного объема перевозок по каналу в обоих направлениях). Именно, теорема остается в силе для неориентированных сетей, если в качестве γ взять случайную величину, распределенную как $\alpha_{ij} - \beta_{ij} - \beta_{ji}$.

В частности, для α и β, распределенных по показательному закону с параметрами λ_α и λ_β соответственно, поток в ориентированной сети асимптотически реализуем при $\lambda_\beta/\lambda_\alpha > \sqrt{2}$ и асимптотически не реализуем при $\lambda_\beta/\lambda_\alpha < \sqrt{2}$. Для неориентированной сети поток асимптотически реализуем при $\lambda_\beta/\lambda_\alpha > 1 + \sqrt{3}$ и асимптотически не реализуем при $\lambda_\beta/\lambda_\alpha < 1 + \sqrt{3}$. Отметим, что в случае $1 < \lambda_\beta/\lambda_\alpha < \sqrt{2}$ для ориентированной сети (и в случае $2 < \lambda_\beta/\lambda_\alpha < 1 + \sqrt{3}$ для неориентированной сети) поток асимптотически не реализуем, хотя имеет место асимптотическая допустимость всей совокупности разрезов.

3. Наметим вкратце *доказательство теоремы.* Для определенности ограничимся ориентированным случаем. Пусть выполнено (1). В этом случае доказательство асимптотической реализуемости потока будет носить конструктивный характер: мы явно укажем алгоритм распределения перевозок, обеспечивающий асимптотическую реализацию потока.

На первой стадии алгоритма все, что возможно, перевозится по путям длины 1. Именно, при всех i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$; $i \neq j$, находим $\delta_{ij} = \min\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$ и отправляем δ_{ij} единиц продукта P_{ij} по каналу (A_i, A_j).

После этого найдем остаточную пропускную способность $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \delta_{ij}$ канала (A_i, A_j) и остаточный объем $\beta'_{ij} = \beta_{ij} - \delta_{ij}$ продукта P_{ij}. Таким образом от исходной (α, β)-задачи мы перейдем к (α', β')-задаче, в которой ничего нельзя перевезти по путям длины 1 (так как $\forall i, j\ \alpha'_{ij}\beta'_{ij} = 0$). Отметим, что обе эти задачи разрешимы или неразрешимы одновременно и этот этап целесообразен независимо от каких-либо предположений о величинах α, β. На второй стадии алгоритма оставшиеся перевозки будем реализовать по путям длины 2. Оказывается, это можно сделать (с вероятностью, близкой к 1 при $n \gg 1$), распределяя их между этими путями пропорционально произведению остаточных пропускных способностей каналов путей.

В терминах α', β' неравенство (1) приобретает вид $M\alpha' > 2M\beta'$, поскольку

$$3\gamma - |\gamma| = 2(\alpha' - 2\beta'). \tag{3}$$

В случае $M\beta' = 0$ все перевозки уже выполнены. Предполагая $M\beta' > 0$, выберем произвольное $\varepsilon > 0$ такое, что $M\alpha'/2M\beta' > 1 + \varepsilon$.

При любых i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$; $i \neq j$, существует $n - 2$ путей $A_i \to A_k \to A_j$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $k \neq i, j$, длины 2 из A_i в A_j. На каждом канале (A_i, A_k), (A_k, A_j) каждого такого пути будем резервировать для продукта P_{ij} пропускную способность

$$\theta^k_{ij} = \frac{1+\varepsilon}{n-2} \frac{\beta'_{ij}}{(M\alpha')^2} \alpha'_{ik}\alpha'_{kj}.$$

Можно показать, что такой способ действий обеспечит асимптотическое решение, а именно, с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$:

а) резервированной пропускной способности будет достаточно для перевозки каждого продукта, т.е.

$$\forall i, j \sum_{k \neq i,j} \theta^k_{ij} \geqslant \beta'_{ij};$$

б) не произойдет перегрузки ни одного канала, т.е.

$$\forall i, j \sum_{m \neq i,j} (\theta^j_{im} + \theta^i_{mj}) \leqslant \alpha'_{ij};$$

При доказательстве используется следующая несложная

Лемма. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — одинаково распределенные центрированные независимые случайные величины, причем $M\xi^6 < \infty$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\frac{1}{n}\Big|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\Big| > \varepsilon\right) = O(n^{-3}), \quad n \to \infty.$$

Переходя ко второй части теоремы, покажем, что при выполнении (2) задача асимптотически неразрешима.

Так как $\alpha'_{ij}\beta'_{ij} = 0$ для всех i, j, то для перевозки каждого продукта требуется не менее двух каналов. Отсюда следует, что для реализуемости потока необходимо выполнение неравенства

$$\sum_{ij} \alpha'_{ij} \geqslant 2 \sum_{ij} \beta'_{ij}. \tag{4}$$

Пусть выполнено (2), что в силу (3) эквивалентно неравенству

$$M\alpha' < 2M\beta'. \tag{5}$$

Переписывая (4) в виде

$$\sum_{ij} (\alpha'_{ij} - 2\beta'_{ij}) \geqslant 0, \tag{6}$$

получим в левой части сумму $n(n-1)$ независимых одинаково распределенных слагаемых, причем математическое ожидание каждого из них отрицательно в силу (5). Согласно закону больших чисел вероятность выполнения (6) стремится к 0 при $n \to \infty$.

4. Изложенный выше принцип — перевозить продукты по путям возможно меньшей длины, распределяя их между путями одной длины пропорционально произведению пропускных способностей — находит применение и за рамками выбранной модели сети. Так, результаты, аналогичные приведенной выше теореме, могут быть получены для стохастических сетей другой структуры (в частности, двудольных). Кроме того, для достаточно широкого класса сетей (не обязательно стохастических) этот принцип можно использовать в качестве полезной эвристики.

Авторы выражают благодарность В. И. Абдулаеву, обратившему их внимание на затронутые выше вопросы.

Литература

1. *Форд, Л. Р.* Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. — М.: Мир, 1966. — 276 с.
2. *Ху, Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. — М.: Мир, 1974. — 520 с.
3. *Гайнуллин, В. Р.* Распределение многопродуктовых потоков в цикле / В. Р. Гайнуллин // Межвузов. темат. сб.: Эвристические алгоритмы оптимизации. — Ярославль: ЯрГУ, 1981. — С. 20—25.
4. Комбинаторные методы в потоковых задачах: Сб. трудов / Под ред. А. В. Карзанова. — М.: ВНИИ системных исследований, 1979. — Вып. 3. — С. 6—70.

15. Абсолютная неосцилляционная устойчивость и смежные вопросы[16]

Рассматриваются классы уравнений

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0,$$

определяемые неравенствами $(0 <)a_i \leqslant p_i(t) \leqslant b_i, i = 1, \ldots, n$. Доказано следующее: для того чтобы все решения любого уравнения из этого класса не колебались и стремились к 0 при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы многочлены

$$u^n + a_1u^{n-1} + b_2u^{n-2} + a_3u^{n-3} + \ldots,$$

$$u^n + b_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} + b_3u^{n-3} + \ldots$$

имели только вещественные корни. Аналогичный критерий получен для того, чтобы все нетривиальные решения удовлетворяли условию $|x(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$. Исследуется оператор L^{-1}, действующий в пространстве ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций. Большинство результатов существенно связано с теорией неосцилляции.

Ниже подробно излагается результат, приведенный в [1], и рассматриваются дополнительные свойства введенных в [1] классов дифференциальных операторов n-го порядка.

1. Пусть

$$a = (a_1, \ldots, a_n),\ b = (b_1, \ldots, b_n),\ 0 < a_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Обозначим через $\Omega(a, b)$ класс операторов

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x \tag{2}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

$$a_i \leqslant p_i(t) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, n\ (t \geqslant t_0) \tag{3}$$

при некотором $t_0(> -\infty)$. Для простоты $p_i(t)$ можно считать непрерывными, но фактически достаточно измеримости при обычных оговорках ($x^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна, неравенства (3) и дифференциальные уравнения выполняются почти всюду на (t_0, ∞)).

Рассмотрим уравнение

$$Lx = 0\ (t \geqslant t_0). \tag{4}$$

[16] Левин А. Ю. Абсолютная неосцилляционная устойчивость и смежные вопросы // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, № 1. — С. 154—166.

Теорема 1. *Для того, чтобы при любом* $L \in \Omega(a, b)$ *все решения уравнения* (4) *не колебались и стремились к нулю при* $t \to \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы многочлены*

$$P_1(u) = u^n + b_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + b_3 u^{n-3} + \ldots,$$

$$P_2(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + a_3 u^{n-3} + \ldots$$

имели только вещественные корни.

Последнее условие проверяется без труда с помощью классического критерия Штурма. Наряду с обычной алгоритмической формой этого критерия иногда удобна иная, связывающая вещественность корней многочлена со знаками определителей, составленных из его коэффициентов (см., например, [2, 3]).

Все вещественные корни P_1, P_2, разумеется, отрицательны в силу положительности a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$. Последнее требование не ограничивает общности: если $a_i \leqslant 0$ для некоторого i, класс $\Omega(a, b)$ не может обладать требуемыми свойствами (так как можно положить $p_i(t) \equiv a_i$, $i = 1, \ldots, n$).

Тот факт, что $L \in \Omega(a, b)$, причем P_1 и P_2 имеют лишь вещественные корни, далее кратко записывается в виде $L \in \Omega^r(a, b)$ или просто $L \in \Omega^r$.

Неколебательность в формулировке теоремы 1 можно понимать как конечность числа нулей на $[t_0, \infty)$ у каждого нетривиального решения. Фактически при $L \in \Omega^r$ имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. *Если* $L \in \Omega^r$, *то расширенная полуось* $[t_0, \infty]$ *есть промежуток неосцилляции для* L; *в частности, каждое нетривиальное решение уравнения* (4) *имеет менее* n *нулей (с учетом кратности) на* $[t_0, \infty)$.

Нули решений при $t = \infty$ понимаются как обобщенные [4] (см. также [5, 6]). Напомним вкратце суть дела. Пусть (α, β) $(-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty)$ — интервал неосцилляции для L, т.е. нетривиальные решения уравнения $Lx = 0$ имеют менее n нулей на (α, β). Тогда существуют иерархические фундаментальные системы (ИФС) при $y \to \beta$, т.е. такие системы решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ уравнения $Lx = 0$, что $x_1, \ldots, x_n$ положительны вблизи β и

$$x_i = o(x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1 \ (t \to \beta) \tag{5}$$

(см.[4, 7]). Решению $x = o(x_n)$ $(t \to \beta)$ приписывается в точке $t = \beta$ нуль кратности k, где k — наибольшее целое, при котором $x = o(x_{n+1-k})$ $(t \to \beta)$. Аналогично определяются обобщенные нули для $t = \alpha$, а также для решений неоднородного уравнения $Lx = f$. (В случае несингулярных концов α, β обобщенные нули совпадают с обычными).

В частности, в условиях теоремы 2 любое нетривиальное решение, имеющее $n-1$ нулей на $[t_0, \infty)$, обладает минимальной (по порядку) скоростью стремления к нулю при $t \to \infty$, тогда как, скажем, решение с максимальной (для $x \not\equiv 0$) скоростью стремления к нулю при $t \to \infty$ вообще не имеет нулей на $[t_0, \infty)$.

Теоремы 1 и 2 (в основной части) сохраняют силу для квазилинейных уравнений, включая уравнения с запаздыванием и т.п. В самом деле, при выполнении (3) возможная зависимость коэффициентов p_i, помимо t и от других аргументов, например от $x, \ldots, x^{(n-1)}$, не влияет, очевидно, на результат. При желании подчеркнуть эту сторону дела можно говорить не об уравнениях, а о дифференциальных включениях или неравенствах.

Теорема 1 близка по характеру к теории абсолютной устойчивости (см., например, [8]). Естественно называть классы $\Omega^r(a,b)$ — или соответствующие параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ — областями абсолютной неосцилляционной (неколебательной, апериодической) устойчивости. Из дальнейшего будет видно, что устойчивость эта носит экспоненциальный характер: как решения, так и их производные до n-го порядка при $a \neq b$ имеют вид $O(e^{\nu_n t})$, где $\nu_n (< 0)$ — наибольший из корней P_1, P_2.

Связь между неосцилляцией и абсолютной устойчивостью затрагивалась в [9].

2. Для доказательства теорем нам помимо известных результатов теории неосцилляции потребуется один факт, относящийся к взаимному расположению корней двух многочленов

$$Q(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n,$$

$$Q^*(z) = z^n + d_1 z^{n-1} + \cdots + d_{n-1} z + d_n.$$

Лемма 1. *Пусть многочлены Q и $Q^* (\not\equiv Q)$ имеют только положительные корни $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ и $\vartheta_1^*, \ldots, \vartheta_n^*$ соответственно* ($0 < \vartheta_1 \leqslant \cdots \leqslant \vartheta_n$, $0 \leqslant \vartheta_1^* \leqslant \cdots \leqslant \vartheta_n^*$). *Если*

$$c_i \leqslant d_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

то эти корни попарно перемежаются:

$$\vartheta_n > \vartheta_n^* \geqslant \vartheta_{n-1}^* > \vartheta_{n-1} \geqslant \vartheta_{n-2} > \cdots \geqslant \begin{cases} \vartheta_1^* > \vartheta_1 & (n \text{ четно}), \\ \vartheta_1 > \vartheta_1^* & (n \text{ нечетно}). \end{cases} \tag{7}$$

Следствие 1. *При $n > 2$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, в каждом интервале $(\vartheta_i^*, \vartheta_{i+2}^*)$ лежат ровно два корня Q (с учетом кратности).*

Хотя лемма носит элементарный характер (и, возможно, не нова), приведем ее доказательство. Так как $Q \not\equiv Q^*$, то в силу (6)

$$Q(z) < Q^*(z) \quad (z > 0) \tag{8}$$

Отсюда следует утверждение леммы при $n = 1, 2$. Для $n \geqslant 3$ воспользуемся индукцией. Пусть лемма доказана для многочленов степени $n - 1$.

Вначале рассмотрим случай четного n. Все n корней Q^* лежат в объединении $n/2$ интервалов

$$(\vartheta_1, \vartheta_2), (\vartheta_3, \vartheta_4), \ldots, (\vartheta_{n-1}, \vartheta_n) \tag{9}$$

так как вне этого объединения $Q^* > Q \geqslant 0$ в силу (8). По той же причине в каждом из интервалов (9) лежит четное число корней Q^*. Покажем, что это число равно двум.

Предположим противное. Тогда найдется интервал $(\vartheta_{k-1}, \vartheta_k)$, содержащий не менее 4 корней многочлена Q^*, а значит, не менее 3 корней его производной $Q^{*\prime}$. По теореме Ролля в том же интервале содержится ровно один корень Q' (так как корни Q вещественны). Отсюда, в частности, $Q' \not\equiv Q^{*\prime}$. Многочлены $Q'/n,\ Q^{*\prime}/n$ удовлетворяют условиям леммы (при $n' = n - 1$): корни их положительны и выполнены требуемые неравенства между коэффициентами согласно (6). В силу предположения индукции и следствия 1 в интервале $(\vartheta_{k-1}, \vartheta_k)$, содержащем не менее 3 корней $Q^{*\prime}$, лежит не менее 2 корней Q'. Это противоречит сказанному выше.

Пусть теперь n нечетно. Все n корней Q^* лежат в объединении интервалов

$$(0, \vartheta_1), (\vartheta_2, \vartheta_3), \ldots, (\vartheta_{n-1}, \vartheta_n), \tag{10}$$

так как вне этих интервалов $Q^*(z) > 0(z) \geqslant Q$ $(z > 0)$. Ясно, что в $(0, \vartheta_1)$ лежит нечетное число корней Q^*, а в остальных интервалах (10) — четное. Покажем, что в $(0, \vartheta_1)$ лежит один корень Q^*, а во всех остальных интервалах — по 2.

Предположим противное. Тогда либо в $(0, \vartheta_1)$ лежит не менее 3 корней Q^*, либо в одном из остальных $(n-1)/2$ интервалов — не менее 4. Последнее невозможно, как показано выше. Первый вариант также исключается — он означал бы, что в интервале $(0, \vartheta_1)$, т.е. левее всех корней Q', лежит не менее двух корней $Q^{*\prime}$. Это противоречит предположению индукции, отнесенному к $Q'/n, Q^{*\prime}/n$. Лемма доказана.

Для справедливости леммы существенно, что система функций $f_k(z) = z^k$, $k = 0, \ldots, n$, является $(+)$-декартовой на $(0, \infty)$, т.е. вронскиан любой подсистемы $f_{i_1}, \ldots, f_{i_s}$ $(0 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n)$ положителен на $(0, \infty)$. Поэтому лемму можно обобщить на $(+)$-декартовы системы. Здесь нам это не понадобится.

3. Возвращаемся к теоремам 1, 2. Часть теоремы 1, относящаяся к необходимости, не нуждается в доказательстве. Тривиален также случай $a = b$ (когда класс $\Omega(a, b)$ сводится к единственному оператору с постоянными коэффициентами). Итак, при доказательстве достаточности можно считать, что $P_1 \not\equiv P_2$.

Пусть все корни $P_1,\ P_2$ отрицательны. Положим

$$Q(z) = (-1)^n P_1(-z) = z^n - b_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots,$$

$$Q^*(z) = (-1)^n P_2(-z) = z^n - a_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} - \dots$$

Многочлены Q и $Q^*(\not\equiv Q)$ удовлетворяют условиям леммы — все корни их положительны и выполнены неравенства (6) для коэффициентов в силу (1). Таким образом, корни многочленов $Q,\ Q^*$ попарно перемежаются согласно (7). Это означает попарную перемежаемость корней

$$\xi_i = \vartheta_{n+1-i},\ \xi_i^* = \vartheta_{n+1-i}^*, \quad i = 1, \dots n,$$

многочленов $P_1,\ P_2$ соответственно:

$$\xi_1 < \xi_1^* \leqslant \xi_2^* < \xi_2 \leqslant \xi_3 < \dots \leqslant \begin{cases} \xi_n^* < \xi_n & (n \text{ четно}), \\ \xi_n < \xi_n^* & (n \text{ нечетно}). \end{cases} \tag{11}$$

Выберем постоянные $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ так, чтобы

$$\nu_0 = \xi_1,\ \nu_1 \in [\xi_1^*, \xi_2^*],\ \nu_2 \in [\xi_2, \xi_3], \dots \tag{12}$$

и так далее, вплоть до

$$\begin{aligned} &\nu_{n-1} \in [\xi_{n-1}^*, \xi_n^*],\ \nu_n = \xi_n \quad (n \ \text{ чётно}), \\ &\nu_{n-1} \in [\xi_{n-1}, \xi_n],\ \nu_n = \xi_n^* \quad (n \ \text{ нечётно}). \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно, ν_n — наибольший из корней P_1, P_2. Как следует из (11), при таком выборе ν_i имеют место неравенства

$$\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_n (< 0), \tag{14}$$

$$(-1)^{n-k} P_i(\nu_k) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, n. \tag{15}$$

Положим

$$P(u, t) = u^n + p_1(t) u^{n-1} + \dots + p_{n-1}(t) u + p_n(t).$$

В силу (3) справедливы неравенства

$$(-1)^n P_1(u) \leqslant (-1)^n P(u, t) \leqslant (-1)^n P_2(u),\ (u < 0,\ t \geqslant t_0), \tag{16}$$

т.е. значение $P(u,t)$ заключено между значениями $P_1(u)$, $P_2(u)$ при любых $u<0, t\geqslant t_0$ (и любом n). С учетом (15) получаем

$$(-1)^{n-k}P(\nu_k,t)\geqslant 0,\quad k=0,\dots,n\quad (t\geqslant t_0). \tag{17}$$

Неравенства (14), (17) означают, что корни $\lambda_i(t)$ уравнения

$$P(\lambda,t)=0\quad (t\geqslant t_0)$$

вещественны и разделены константами:

$$\nu_0\leqslant\lambda_1(t)\leqslant\nu_1\leqslant\lambda_2(t)\leqslant\dots\leqslant\lambda_n(t)\leqslant\nu_n\quad (t\geqslant t_0). \tag{18}$$

Как известно [4, 7], отсюда вытекает, что $[t_0,\infty)$ — промежуток неосцилляции для L (неравенства, связанные с ν_0,ν_n, здесь несущественны).

Далее, из (18) следует [4], что любая ИФС при $t\to\infty$ $x_1,\dots,x_n$ удовлетворяет при больших t неравенствам

$$c_ie^{\nu_{i-1}t}\leqslant x_i(t)\leqslant c_i'e^{\nu_it}\quad i=1,\dots,n\quad (t\geqslant t_1) \tag{19}$$

(c_i, c_i' — положительные постоянные), причем экспоненциально убывают также и производные решений:

$$x_i^{(k)}(t)=O(e^{\nu_it})\quad (t\to\infty),\quad i=1,\dots,n,\quad k=0,\dots,n. \tag{20}$$

Итак, для любого решения уравнения $Lx=0$

$$x^{(k)}(t)=O(e^{\nu_nt})\ (t\to\infty),\quad k=0,\dots,n. \tag{21}$$

Поскольку $\nu_n<0$, это означает экспоненциальную устойчивость решений системы, отвечающей уравнению $Lx=0$.

Отметим, что в случае $a=b$ (исключенном выше) (21) может нарушаться, если ν_n — кратный корень многочлена $P_1(\equiv P_2)$. Сам факт экспоненциальной устойчивости, конечно, остается в силе.

Приведенные рассуждения доказывают теорему 1. Что касается теоремы 2, то здесь пока установлена неосцилляционность L на $[t_0,\infty)$, но не на $[t_0,\infty]$. Этот пробел легко восполнить, если воспользоваться простейшими свойствами сопряженных точек.

Напомним, что сопряженная к t точка $\bar t$ — это точная нижняя грань $\tau\in(t,\infty]$ таких, что $[t,\tau]$ не является промежутком неосцилляции для L (если такие τ отсутствуют, то величина $\bar t$ не определена). Как известно, $\bar t$ как функция t строго возрастает в своей области определения ([10–13], относительно нужного нам сейчас сингулярного случая см. [4], лемма 3.4).

Рассуждая от противного, допустим, что $[t_0,\infty]$ не является промежутком неосцилляции для L; тогда $\bar t_0=\infty$. Продолжим коэффициенты $p_i(t)$, полагая, например, $p_i(t) \equiv a_i$, при $t < t_0$, и выберем произвольное $t_1 \leqslant t_0$. Из сказанного выше следует, что $[t_1, \infty)$, как и $[t_0, \infty)$, есть промежуток неосцилляции для L, тогда как $[t_1, \infty]$ таковым не является. Следовательно, $\bar{t}_1 = \infty$. Но равенство $\bar{t}_0 = \bar{t}_1 = \infty$ противоречит строгой монотонности $\bar{t}$.

Теоремы 1, 2 полностью доказаны.

4. Аналогично может быть рассмотрен случай решений, растущих при $t \to \infty$ — менее важный, по-видимому, для приложений, но не лишенный интереса. В следующей формулировке снимается предположение о положительности a_i, b_i.

Теорема 3. *Для того чтобы при любом $L \in \Omega(a, b)$ все нетривиальные решения уравнения $Lx = 0$ удовлетворяли условию*

$$| x(t) | \to \infty \quad (t \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы многочлены

$$R_1(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \ldots, \ R_2(u) = u^n + b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \ldots$$

имели только положительные корни. При выполнении последнего условия $[t_0, \infty]$ есть промежуток неосцилляции для L.

Доказательство аналогично доказательству теорем 1, 2, отличаясь лишь некоторыми упрощениями. Многочлены $Q = R_1$, $Q^* = R_2$ удовлетворяют условиям леммы 1 (при $a \neq b$), поэтому для их корней $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ и $\vartheta_1^*, \ldots, \vartheta_n^*$ выполняется (7). Выбираем

$$\nu_n = \vartheta_n, \ \nu_{n-1} \in [\vartheta_{n-1}^*, \vartheta_n^*], \ \nu_{n-2} \in [\vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1}], \ldots$$

и пользуемся неравенством

$$R_1(u) \leqslant P(u, t) \leqslant R_2(u), \ (u > 0, t \geqslant t_0)$$

Отсюда следует (17), и далее применима прежняя аргументация с очевидными изменениями.

5. В этом пункте перейдем от скалярного уравнения к матричному

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \ U(t_0) = I \quad (t_0 \leqslant t < \infty), \tag{22}$$

где матрицы-функции $A(t), U(t)$ $\left(= \| x_i^{(k-1)} \|_1^n \right)$ n-го порядка определяются обычным образом. Назовем допустимыми $A(t)$, отвечающие скалярным операторам из $\Omega^r(a, b)$ (a, b фиксированы, $a \neq b$).

Как следует из (21), при любой допустимой $A(t)$

$$\| U(t)U^{-1}(s) \| \leqslant ce^{\nu_n(t-s)} \quad (t_0 \leqslant s < t < \infty), \tag{23}$$

где c может зависеть и от s, и от $A(t)$. Сам характер ограничений на $A(t)$ подсказывает, однако, что здесь должна иметь место равномерная оценка.

Следствие 2. *При любой допустимой* $A(t)$ *справедлива оценка* (23)*, где* c *зависит лишь от* a, b.

Для доказательства предположим противное. Тогда для любых чисел c_k $(k = 1, 2, \dots)$ найдутся $s_k(\geqslant t_0), h_k(> 0)$ и допустимые $A_k(t)$ такие, что

$$\| U_k(s_k + h_k)U_k^{-1}(s_k) \| > c_k e^{\nu_n h_k} \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{24}$$

где $U_k(t)$ — невырожденное решение уравнения $\dot{U}_k = A_k(t)U_k$. Выбирая каким-либо образом $c_1, c_2, \dots$ (способ выбора будет указан ниже), рассмотрим уравнение вида (22), где

$$A(t) = A_k(t - t_{k-1} + s_k) \quad \text{при} \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k,$$
$$t_k = t_0 + h_1 + \dots + h_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

По самому построению $A(t)$ при $k = 1, 2, \dots$

$$U_k(t - t_{k-1} + s_k)U_k^{-1}(s_k) = U(t)U^{-1}(t_{k-1}) \quad (t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k). \tag{25}$$

Последовательно определим c_k формулами

$$c_k = \| U^{-1}(t_{k-1}) \| e^{\nu_n t_{k-1} + k}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{26}$$

Сопоставляя равенство (25) при $t = t_k$ с (24), (26), имеем

$$\begin{aligned}\| U(t_k) \| &\geqslant \| U(t_k)U^{-1}(t_{k-1}) \| \, \| U^{-1}(t_{k-1}) \|^{-1} = \\ &= \| U_k(h_k + s_k)U_k^{-1}(s_k) \| \, \| U^{-1}(t_{k-1}) \|^{-1} > \\ &> c_k e^{\nu_n h_k} \| U^{-1}(t_{k-1}) \|^{-1} = e^{\nu_n h_k + \nu_n t_{k-1} + k} = e^{\nu_n t_k + k}.\end{aligned}$$

Но это противоречит (23) (при $t = t_k$, $s = t_0$), поскольку $A(t)$, будучи «склейкой» допустимых матриц-функций, сама, очевидно, допустима. Следствие 2 доказано.

6. До сих пор мы интересовались помимо неосцилляции поведением решений и их производных при $t \to \infty$, представляющим основной интерес для устойчивости. Примем теперь, что

$$0 < a_i \leqslant p_i(t) \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, n \; (-\infty < t < \infty) \tag{27}$$

и рассмотрим некоторые вопросы, связанные с поведением решений на всей числовой прямой. Обозначения $\Omega(a, b)$, $\Omega^r(a, b)$ далее понимаются в соответствии с (27) (т.е. при $t_0 = -\infty$).

Часто знакопостоянные решения достаточно полно характеризуются оценками их логарифмических производных. Нам понадобится следующий результат Ф. Хартмана.

Теорема 4 (см. [7, 13–15]). *Пусть при некоторых* $\nu_0, \dots, \nu_n$ $(\nu_0 < \dots < \nu_n)$ *и при всех* $t(-\infty < t < \infty)$ *выполнены неравенства* (18). *Тогда существуют положительные на* $(-\infty, \infty)$ *решения* $x_1, \dots, x_n$ *уравнения* $Lx = 0$ *такие, что*

$$\nu_0 \leqslant \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} \leqslant \nu_1 \leqslant \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} \leqslant \dots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \frac{\dot{x}_n(t)}{x_n(t)} \leqslant \nu_n \; (-\infty < t < \infty). \tag{28}$$

Здесь $x_1, \dots, x_n$ могут, вообще говоря, быть линейно зависимыми (вопреки [7]; данный дефект устранен Ф. Хартманом и В. Коппелем в [13–15]. Аналогичный дефект, между прочим, допущен С. Н. Бернштейном в основной теореме его известной работы [16] о чебышевских системах; см., например, [17, 18]. Суть дела сводится к тому, что оператор, неосцилляционный на (α, β), может не быть таковым на $[\alpha, \beta]$.

Чтобы исключить линейную зависимость $x_1, \dots, x_n$, несколько усилим требования к P_1, P_2.

Теорема 5. *Пусть* $L \in \Omega^r(a, b)$, *причем все корни многочленов* P_1, P_2 *являются простыми. Тогда* $[-\infty, \infty]$ *есть промежуток неосцилляции для* L *и уравнение* $Lx = 0$ *обладает фундаментальной системой решений* $x_1, \dots, x_n$ *таких, что*

$$\begin{aligned} &\xi_i \leqslant \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} \leqslant \xi_i^* \quad \textit{для нечетных } i, \\ &\xi_i^* \leqslant \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} \leqslant \xi_i \quad \textit{для четных } i \end{aligned} \tag{29}$$

$(-\infty < t < \infty; \; i = 1, \dots, n)$. *Здесь* ξ_i, ξ_i^* *— корни многочленов* P_1, P_2 *соответственно* $(\xi_1 < \dots < \xi_n, \; \xi_1^* < \dots < \xi_n^*)$.

Покажем вначале, что для любого фиксированного i найдется решение x_i, удовлетворяющее соответствующему из двойных неравенств (29).

Воспользуемся определенным произволом в выборе постоянных $\nu_0, \ldots, \nu_n$. Именно, положим

$$\begin{aligned} &\nu_{i-1} = \xi_i,\ \nu_i = \xi_i^*, \quad \text{если } i \text{ нечетно},\\ &\nu_{i-1} = \xi_i^*,\ \nu_i = \xi_i, \quad \text{если } i \text{ четно}; \end{aligned} \tag{30}$$

остальные ν_j выбираются в соответствии с (12)–(13). Так как требования (12)–(13) не нарушены, при таком выборе выполнены неравенства (18). По теореме Хартмана существует решение $x_i > 0$, удовлетворяющее соответствующему из неравенств (28) или, что то же в силу (30), из неравенств (29). Варьируя i от 1 до n, получаем положительные решения $x_1, \ldots, x_n$ уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющие неравенствам (29).

Эти решения линейно независимы. Действительно, ввиду простоты корней P_1, P_2 все неравенства (11) являются строгими. Следовательно, промежутки локализации

$$[\xi_1, \xi_1^*], [\xi_2^*, \xi_2], \ldots \tag{31}$$

для $\dfrac{\dot{x}_1}{x_1}, \dfrac{\dot{x}_2}{x_2}, \ldots$ строго разделены. Поэтому

$$x_i = o(x_{i+1}) \quad (t \to \infty), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{32}$$

т.е. $x_1, \ldots, x_n$ — ИФС при $t \to \infty$ (неосцилляционность L на $(-\infty, \infty)$ ясна из предыдущего). В силу той же строгой разделенности промежутков (31)

$$x_i = o(x_{i-1}) \quad (t \to -\infty), \quad i = 2, \ldots, n. \tag{33}$$

Ввиду (32), (33) $x_1, \ldots, x_n$ образуют, в терминологии [4], дважды иерархическую фундаментальную систему на $(-\infty, \infty)$, а значит, (+)-декартову систему на $(-\infty, \infty)$.

Осталось доказать неосцилляционность L на $[-\infty, \infty]$. Допустим противное, тогда $-\infty = \infty$. Как известно, для любого промежутка вида $[\tau, \tilde{\tau}]$ $(\tau \neq \tilde{\tau})$ существует положительное при $\tau < t < \tilde{\tau}$ решение $x(t)$ уравнения $Lx = 0$, суммарная кратность нулей которого в точках τ и $\tilde{\tau}$ не менее n ([10, 11], по поводу интересующего нас сейчас сингулярного случая см. [4], теорема 3.3). Но любое нетривиальное решение

$$x = c_j x_j + c_{j+1} x_{j+1} + \cdots + c_k x_k \quad (j \leqslant k,\ c_j c_k \neq 0)$$

имеет согласно (32), (33) в $-\infty$ и ∞ нули кратностей $j-1$ и $n-k$ соответственно, что в сумме не превосходит $n-1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 5.

Теорема 5 допускает переформулировку для случая растущих решений, подобную теореме 3; основным требованием является опять-таки положительность (и простота) корней многочленов R_1, R_2. Так как по существу все сводится к замене $t' = -t$, можно на этом не останавливаться.

В данном пункте не затрагивалось поведение старших производных. По этому поводу отметим лишь, что следствие 2 сохраняет силу и для всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$. Доказательство остается тем же с очевидными изменениями (t_0 выбирается произвольно, исключается требование $s_k \geqslant t_0$ и т.п.).

7. Рассмотрим теперь на $(-\infty, \infty)$ неоднородное уравнение

$$Lx = f(t) \ (-\infty < t < \infty) \tag{34}$$

с $L \in \Omega^r(a, b)$. Нас будут интересовать, в частности, решения, ограниченные на $(-\infty, \infty)$. Обозначим через E банахово пространство измеримых ограниченных в существенном функций $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ с нормой

$$\| f \| = \operatorname{vrai} \max_{-\infty < t < \infty} |f(t)|.$$

Для определенности будем говорить о вещественных функциях, хотя все утверждения, сохраняющие смысл для комплекснозначных f (не касающиеся знаков и т.п.) тривиально переносятся на комплекснозначный случай.

Число перемен знака $S_{(\alpha,\beta)}f$ измеримой $f(t)$ в интервале $\alpha < t < \beta$ понимается как наименьшее из целых $m \geqslant 0$ таких, что почти всюду в (α, β) при $j = 0$ или 1

$$(-1)^j (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_m) f(t) \geqslant 0$$

для некоторых $t_1, \dots, t_m$; при отсутствии таких m $S_{(\alpha,\beta)}f = \infty$.

Теорема 6. *Пусть* $L \in \Omega^r(a, b)$. *При любой* $f \in E$ *уравнение* (34) *имеет единственное ограниченное на* $(-\infty, \infty)$ *решение* $x = L^{-1}f$, *определяемое формулой*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, s) f(s)\, ds \quad (-\infty < t < \infty), \tag{35}$$

где $K(t, s)$ — *функция Коши оператора* L. *Действующий в* E *линейный оператор* L^{-1} *является монотонным и не повышает числа перемен знака. Для его нормы* $\|L^{-1}\|$ *и спектрального радиуса* $r(L^{-1})$ *справедливы оценки*

$$b_n^{-1} \leqslant r(L^{-1}) \leqslant \|L^{-1}\| \leqslant a_n^{-1}, \tag{36}$$

неулучшаемые в классе $\Omega^r(a, b)$.

Некоторые из этих утверждений непосредственно вытекают из предыдущего. Так, единственность обусловлена отсутствием нетривиальных ограниченных решений уравнения $Lx = 0$ — все его решения ($\not\equiv 0$) неограничено растут по модулю при $t \to -\infty$. При простых корнях P_1, P_2 это сразу следует из теоремы 5. В общем случае достаточно положить $t' = -t$ и сослаться на теорему 3.

Лемма 2. *При* $L \in \Omega^r(a,b)$ $(a \neq b)$ *функция Коши оператора* L *удовлетворяет неравенствам*

$$0 < K(t,s) < ce^{\nu_n(t-s)} \quad (-\infty < s < t < \infty), \tag{37}$$

где c *— некоторая постоянная.*

Положительность $K(t,s)$ при $t > s$ следует из неосцилляционности L, поскольку K как функция t имеет $(n-1)$-кратный нуль в точке $t = s$. Второе из неравенств (37) вытекает из следствия 2 (сохраняющего силу, как отмечалось, и для уравнений на $(-\infty, \infty)$), так как $K(t,s)$ совпадает с одним из элементов матрицы-функции $U(t)U^{-1}(s)$.

Лемма 3. *Если* $L \in \Omega^r(a,b)$ $(a \neq b)$ *и*

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\nu_n t}|f(t)|\,dt < \infty \tag{38}$$

то интеграл в (35) *абсолютно сходится и удовлетворяет уравнению* (34).

Сходимость интеграла легко следует из леммы 2, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{t} |K(t,s)f(s)|\,ds \leqslant ce^{\nu_n t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\nu_n s}|f(s)|\,ds;$$

отсюда же следует ограниченность $x(t)$ в случае ограниченной $f(t)$.

Равенство $Lx = f$ для $x(t)$, определенной в (35), проверяется стандартным образом. Леммы 2 и 3 доказаны.

Итак, (35) есть решение уравнения (34) при любой (локально суммируемой) $f(t)$, удовлетворяющей требованию (38) — менее жесткому, чем ограниченность в существенном (так как $\nu_n < 0$, не исключается экспоненциальный рост $|f(t)|$ при $t \to -\infty$, поведение $f(t)$ при $t \to \infty$ может быть любым и т.п.). Далее считаем, что $f \in E$; в этом случае (35) выделяет среди всех решений уравнения (34) единственное ограниченное на $(-\infty, \infty)$. Его производные до n-го порядка в соответствии с теоремой Эсклангона также ограничены на $(-\infty, \infty)$.

Продолжим доказательство теоремы 6. Положительность $K(t,s)$ при $t > s$ влечет за собой следующее:

$$\text{если } f_1 \leqslant f_2 \quad (-\infty < t < \infty), \text{ то } \ L^{-1} f_1 \leqslant L^{-1} f_2 \quad (-\infty < t < \infty),$$

т.е. оператор L^{-1} является монотонным.

Докажем теперь неравенства (36); при этом монотонность L^{-1} будет играть существенную роль. Так как $L\mathbf{1} = p_n(t) \in E$, то $L^{-1}p_n = \mathbf{1}$. Отсюда с учетом (27)

$$a_n L^{-1}\mathbf{1} = L^{-1}a_n \leqslant L^{-1}p_n = \mathbf{1} \leqslant L^{-1}b_n = b_n L^{-1}\mathbf{1},$$
$$b_n^{-1} \leqslant L^{-1}\mathbf{1} \leqslant a_n^{-1} \quad (-\infty < t < \infty). \quad (39)$$

Если заданы двусторонние границы для f

$$c_1 \leqslant f(t) \leqslant c_2 \quad (-\infty < t < \infty),$$

то

$$c_1 L^{-1} 1 = L^{-1} c_1 \leqslant L^{-1} f = x \leqslant L^{-1} c_2 = c_2 L^{-1}\mathbf{1},$$

откуда с учетом (39) получаем границы для x:

$$b_n^{-1} c_1 \leqslant x(t) \leqslant a_n^{-1} c_2 \quad \text{при } 0 \leqslant c_1 \leqslant c_2, \quad (40)$$

$$a_n^{-1} c_1 \leqslant x(t) \leqslant a_n^{-1} c_2 \quad \text{при } c_1 < 0, \ c_2 \geqslant 0, \quad (41)$$

$$a_n^{-1} c_1 \leqslant x(t) \leqslant b_n^{-1} c_2 \quad \text{при } c_1 \leqslant c_2 < 0 \quad (42)$$

$(-\infty < t < \infty)$. Точный характер этих оценок в классе $\Omega^r(a,b)$ очевиден (так, первое из неравенств (40) обращается в равенство при $p_n(t) \equiv b_n$, $f(t) \equiv c_1$ и т.д.). Вид оценок (40)–(42) таков, как если бы оператор L содержал лишь член $p_n(t)x$ (это связано с критичностью случая $x \equiv \mathrm{const}$).

Из (41) непосредственно следует, что $\| L^{-1} \| \leqslant a_n^{-1}$. Равенство, очевидно, достигается при $p_n(t) \equiv a_n$.

Из сказанного, между прочим, вытекает, что L^{-1} *является сжатием в* E *для каждого* $L \in \Omega^r(a,b)$ *в том и только том случае, если* $a_n > 1$.

Для доказательства первого из неравенств (36) заметим, что монотонность L^{-1} позволяет итерировать (39):

$$b_n^{-m} \leqslant L^{-m}\mathbf{1} \leqslant a_n^{-m}, \quad m = 1, 2, \ldots \ (-\infty < t < \infty).$$

Отсюда, так как $\|\mathbf{1}\| = 1$,

$$r(L^{-1}) = \lim_{m\to\infty} \|L^{-m}\|^{1/m} \geqslant \lim_{m\to\infty} \|L^{-m}\mathbf{1}\|^{1/m} \geqslant \lim_{m\to\infty} (b_n^{-m})^{1/m} = b^{-1}.$$

Доказанное неравенство $r(L^{-1}) \geqslant b_n^{-1}$ обращается в равенство при $p_n(t) \equiv b_n$, когда b_n^{-1} есть собственное значение оператора L^{-1}.

Для завершения доказательства осталось проверить, что

$$S_{(-\infty,\infty)}x \leqslant S_{(-\infty,\infty)}f. \tag{43}$$

Суть дела состоит в том, что $x(t)$ как решение уравнения $Lx = f$ имеет обобщенный n-кратный нуль при $t = -\infty$, после чего можно сослаться на факторизуемость L и теорему Ролля (модифицированную). Приведем более подробное пояснение.

Достаточно доказать, что для любого m $(1 \leqslant m < \infty)$ неравенство

$$S_{(-\infty,\infty)}x \geqslant m \tag{44}$$

влечет за собой неравенство

$$S_{(-\infty,\infty)}f \geqslant m. \tag{45}$$

Чтобы перейти от обобщенных нулей к обычным, положим

$$x_\tau(t) = \int\limits_\tau^t K(t,s)f(s)ds.$$

Очевидно, $x_\tau(t)$ есть решение уравнения $Lx = f$ такое, что

$$x_\tau(\tau) = \left.\frac{dx_\tau(t)}{dt}\right|_{t=\tau} = \left.\frac{d^{n-1}x_\tau(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=\tau} = 0. \tag{46}$$

Кроме того,

$$x_\tau(t) \to x(t) \text{ при любом } t \quad (\tau \to -\infty). \tag{47}$$

Действительно, поскольку $\nu_n < 0$, то в силу леммы 2

$$|x(t) - x_\tau(t)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\tau} K(t,s)f(s)\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\| \int\limits_{-\infty}^{\tau} K(t,s)\,ds \leqslant c_1 e^{\nu_n(t-\tau)} \to 0 \quad (\tau \to -\infty).$$

Пусть выполнено (44). Тогда согласно (47) для некоторого τ

$$S_{(\tau,\infty)}x_\tau \geqslant m.$$

Поскольку $x_\tau(t)$ имеет n-кратный нуль при $t = \tau$ ввиду (46), то из факторизуемости L и теоремы Ролля стандартным образом следует, что $S_{(\tau,\infty)}f \geqslant m$. Это доказывает (45), а следовательно, и (43).

Отметим, что (43) справедливо и в усиленной форме

$$S_{(-\infty,t)}x \leqslant S_{(-\infty,t)}f \quad (-\infty < t < \infty).$$

Это сразу следует из (43) и «эволюционности» оператора L^{-1} в том смысле, что значения $x(\tau)$ при $\tau \leqslant t$ не зависят от поведения $f(\tau)$ при $\tau > t$. Аналогичное замечание относится, естественно, и к свойству монотонности оператора L^{-1}.

Теорема 6 доказана.

8. В п. 7 в центре внимания были ограниченные решения. Если при сохранении предположения $L \in \Omega^r$ наложить дополнительное требование ω-периодичности или почти периодичности коэффициентов $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ и правой части $f(t)$, то ограниченное решение $x = L^{-1}f$ будет вдобавок ω-периодическим (что очевидно) или соответственно почти периодическим, что вытекает из сказанного выше и хорошо известных фактов. Необходимые сведения можно найти, например, в [19, 20], где, кстати, в ряде разделов затрагиваются неосцилляционные операторы.

Для периодического и почти периодического случаев число перемен знака на $(-\infty, \infty)$ не является содержательной характеристикой, так как принимает лишь значения 0 или ∞. В ω-периодическом случае информативной характеристикой может служить число $S_{[0,\omega)}f$ перемен знака на периоде (очевидно, четное в случае конечности). При этом выполняется неравенство (для $L \in \Omega^r$)

$$S_{[0,\omega)}x \leqslant S_{[0,\omega)}f, \tag{48}$$

где x — ω-периодическое решение уравнения $Lx = f$. Другими словами, для $L \in \Omega^r$ осцилляция на выходе «не сильнее» осцилляции на входе. Чтобы пояснить (48), напомним, что $L \in \Omega^r$ заведомо является неосцилляционным на числовой прямой и поэтому, будучи оператором с ω-периодическими коэффициентами, факторизуем на окружности (см. [21]):

$$L = \Big(\frac{d}{dt} + v_1\Big)\Big(\frac{d}{dt} + v_2\Big)\ldots\Big(\frac{d}{dt} + v_n\Big),$$

где $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — вещественные ω-периодические и достаточно гладкие функции. Отсюда и из соображений четности S легко следует (48).

Существуют и совершенно иные по характеру приложения, не связанные с периодичностью или почти периодичностью. Приведем один пример, относящийся к краевой задаче

$$Lx = \lambda r(t)x \quad (-\infty < t_1 < t_2 < \infty), \tag{49}$$

$$x^{(i)}(t_1) = x^{(j)}(t_2) = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1,\ j = 0, \ldots, n-k-1, \tag{50}$$

где $r(t) \geqslant 0$ в (t_1, t_2) (r суммируема и не эквивалентна нулю).

Следствие 3. *Если* $L \in \Omega^r$, *то при любых* t_1, t_2 *и любом* k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ *спектр краевой задачи* (49)–(50) *состоит из счетного числа простых вещественных собственных значений, совпадающих по знаку с* $(-1)^{n-k}$.

Собственные функции в условиях следствия 3 обладают «штурм-лиувиллевскими» свойствами, за исключением ортогональности. Следствие 3 вытекает из теоремы 2 и результата, сформулированного М. Г. Крейном [22] (по поводу доказательства см. [23, 24]). Подробнее о результатах этого типа, восходящих к О. Келлогу – Ф. Р. Гантмахеру – М. Г. Крейну, см. [25–28].

Можно было бы привести дальнейшие примеры применения операторов из Ω^r, относящиеся к теории чебышевских систем, теоремам сравнения, оптимальному управлению, нелинейным краевым задачам и т.д. (см., например, [4, 13, 29–35]. Таким образом, классы $\Omega^r(a,b)$ представляют интерес не только для теории устойчивости.

Литература

1. *Левин, А. Ю.* Критерий абсолютной неосцилляционной устойчивости для уравнений n-го порядка / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1988. — Т. 43, № 5(263). — С. 203—204.
2. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
3. *Джури, Э.* Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури. — М.: Наука, 1979. — 299 с.
4. *Левин, А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43—96.
5. *Willett, D.* Disconjugacy tests for singular linear differential equations / D. Willett // *SIAM J. Math. Anal.* — 1971. — Vol. 2, no. 4. — P. 536—545.
6. *Willett, D.* A generalization of ČČaplygin's inequality with applications to singular boundary value problems / D. Willett // *Can. J. Math.* — 1973. — Vol. 25, no. 5. — P. 1024—1039.
7. *Hartman, P.* Principal solutions of diconjugate n-th order linear differential equations / P. Hartman // *Am. J. Math.* — 1969. — Vol. 91. — P. 306—362.
8. *Якубович, В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости / В. А. Якубович // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р. А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — С. 74—180.
9. *Либерзон, М. Р.* Признак абсолютной устойчивости нестационарных систем / М. Р. Либерзон // *Автоматика и телемеханика*. — 1986. — № 2. — С. 39—46.

10. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512—515.
11. *Sherman, T. L.* Properties of solutions of Nth order linear differential equations / T. L. Sherman // *Pac. J. Math.* — 1965. — Vol. 15, no. 3. — P. 1045—1060.
12. *Hinton, D. B.* Disconjugate properties of a system of differential equations / D. B. Hinton // *J. Differ. Equations.* — 1966. — Vol. 2. — P. 420—437.
13. *Coppel, W. A.* Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220 / W. A. Coppel. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1971. — 147 p.
14. *Hartman, P.* Corrigendum and addendum: Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations / P. Hartman // *Am. J. Math.* — 1971. — Vol. 93. — P. 439—451.
15. *Hartman, P.* Disconjugacy and Wronskians / P. Hartman // Japan-U.S. Seminar on Ordinary Differential Equations and Functional Equations (M. Urabe, Ed.). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 243. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1971. — P. 208—218.
16. *Бернштейн, С. Н.* О базе системы Чебышева / С. Н. Бернштейн // Бернштейн, С. Н. Собр. соч. — М.: Изд. АН СССР, 1954. — Т. 2. — С. 287—291.
17. *Крейн, М. Г.* Проблемы моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. — М.: Наука, 1973. — 551 с.
18. *Покорный, Ю. В.* Об одной осцилляционной теореме С. Н. Бернштейна / Ю. В. Покорный // *Матем. заметки.* — 1988. — Т. 43, № 5. — С. 615—623.
19. *Красносельский, М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М.: Наука, 1970. — 351 с.
20. *Бурд, В. Ш.* О существовании и знакопостоянстве функции Грина скалярных уравнений высших порядков с почти периодическими коэффициентами / В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, М. А. Красносельский // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1969. — Т. 33, № 6. — С. 1399—1415.
21. *Левин, А. Ю.* Факторизация и непонижение осцилляции на окружности / А. Ю. Левин // Proc. Conf. “Equadiff 5”. — Vol. 47. — Leipzig: Teubner-Texte Math., 1982. — P. 226—227.
22. *Крейн, М. Г.* О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / М. Г. Крейн // *ДАН СССР.* — 1939. — Т. 25, № 8. — С. 643—646.
23. *Левин, А. Ю.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I / А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов // *Сиб. матем. журн.* — 1976. — Т. 17, № 3. — С. 606—626.

24. *Левин, А. Ю.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. II / А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов // *Сиб. матем. журн.* — 1976. — Т. 17, № 4. — С. 813—830.
25. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.
26. *Karlin, S.* Total positivity / S. Karlin. — Stanford univ. press edition. — 1968. — Vol. 1. — 576 p.
27. *Степанов, Г. Д.* Критерий осцилляционности функции Грина двухточечной краевой задачи / Г. Д. Степанов // *ДАН СССР*. — 1973. — Т. 213, № 4. — С. 793—794.
28. *Барковский, Ю. С.* Спектральные свойства одного класса краевых задач / Ю. С. Барковский, В. И. Юдович // *Матем. сб.* — 1981. — Т. 114 (156), № 3. — С. 438—450.
29. *Карлин, С.* Чебышёвские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. — М.: Наука, 1976. — 568 с.
30. *Swanson, C. A.* Comparison and oscillation theory of linear differential equations / C. A. Swanson. — New York - London: Academic Press, 1968. — 234 p.
31. *Иоффе, А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
32. *Тонков, Е. Л.* Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию / Е. Л. Тонков // *Диф. уравнения*. — 1973. — Т. 9, № 12. — С. 2180—2185.
33. *Muldowney, J. S.* Comparison criteria for disconjugacy / J. S. Muldowney // Optimal control and differential equations, Proc. Conf., Norman/Okla. 1977. — 1978. — P. 317–329.
34. *Кигурадзе, И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе. — Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1975.
35. *Trench, W. F.* Oscillation properties of perturbed disconjugate equations / W. F. Trench // *Proc. Am. Math. Soc.* — 1975. — Vol. 52. — P. 147—155.

16. Теорема Харитонова для слабонестационарных систем[17]

1. Пусть $(n \times n)$-матрица A принимает всевозможные значения из компакта $\mathfrak{C}$. Совокупность соответствующих характеристических полиномов (с точностью до знака) $\lambda^n + (\alpha_1 + i\beta_1)\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_n + i\beta_n)$ можно вложить в семейство вида

$$a_k \leqslant \alpha_k \leqslant a_k', \quad b_k \leqslant \beta_k \leqslant b_k' \quad (k = \overline{1, n}) \tag{1}$$

Согласно [1], [2] для устойчивости всех полиномов этого семейства необходима и достаточна устойчивость явно указываемых восьми (в вещественном случае — четырех) полиномов семейства. То же условие, следовательно, достаточно для асимптотической устойчивости всех систем $\dot{X} = AX$ $(A \in \mathfrak{C})$.

Пусть теперь $A(t)$ — переменная матрица, причем $A(t) \in \mathfrak{C}$ при любом t. Характеристические полиномы таких матриц при фиксированных значениях t принадлежат, очевидно, тому же семейству (1). Однако из устойчивости всех полиномов семейства, как известно, не следует устойчивость системы $\dot{X} = A(t)X$. В этом смысле теорема Харитонова не распространяется на нестационарный случай.

Недавно Б. Т. Поляк высказал гипотезу о том, что теорема Харитонова сохраняется для нестационарных систем с медленно меняющимися коэффициентами, и подкрепил свое предположение естественными эвристическими соображениями. Данная гипотеза подтвердилась, причем понятие «медленного изменения» можно трактовать достаточно широко.

2. Положим $h = \max ||B||$ $(B \in \mathfrak{C})$, $\gamma = -\max \operatorname{Re} \lambda$, где максимум берется по всем собственным значениям матриц $B \in \mathfrak{C}$. Введем (при $\gamma > 0$) следующее условие медленного изменения $A(t)$: существует $\varphi(s)$ такая, что

$$||A(t+s) - A(t)|| \leqslant \varphi(s) \quad (t \geqslant t_0, s > 0), \tag{2}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma s} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2hs)^k}{k!} \Big) \varphi(s)\, ds < 1. \tag{3}$$

Теорема 7. *Пусть для семейства* (1)*, отвечающего компакту* $\mathfrak{C}$*, все многочлены Харитонова устойчивы и, следовательно,* $\gamma > 0$*. Тогда любая система* $\dot{X} = A(t)X$ *с медленно меняющейся в смысле* (2), (3) *матрицей* $A(t) \in \mathfrak{C}$ $(t > t_0)$ *экспоненциально устойчива.*

[17] Левин А.Ю. Теорема Харитонова для слабонестационарных систем (в Московском математическом обществе) // УМН. — 1995. — Т. 50, № 6(306). — С. 189–190.

Доказательство существенно связано с результатами В. М. Алексеева (см. [3], [4]).

Случай постоянных матриц тривиален ($\varphi \equiv 0$). Рассмотрим несколько более содержательных примеров.

Если $A(t)$ равномерно непрерывна на $[t_0, \infty)$ (например, почти периодична), то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ матрица $A(\varepsilon t)$ будет медленно меняющейся в смысле (2), (3). Действительно пусть $g(t)$ — модуль непрерывности для $A(t)$, т.е. $g(\varepsilon t)$ — модуль непрерывности для $A(\varepsilon t)$. Очевидно, $g(\varepsilon t) \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) равномерно на каждом конечном промежутке, т.е. при $\varphi(s) = g(\varepsilon s)$ левая часть (3) стремится к 0 ($\varepsilon \to 0$). Отметим что требование равномерности непрерывности здесь не может быть отброшено.

К медленно меняющимся (в нашем смысле) относятся $A(t)$, удовлетворяющие условию Липшица с константой

$$L < \frac{(2h-\gamma)^2}{n(2h\gamma^{-1})^{n+1} - (n+1)(2h\gamma^{-1})^n + 1}. \tag{4}$$

Действительно, (4) эквивалентно (3) при $\varphi(s) = Ls$. Разумеется, в (4) L можно заменить на $||\dot{A}(t)||$, но само условие (2), (3) не предполагает гладкости (или непрерывности) $A(t)$.

В этой связи упомянем случай, когда $A(t)$ (вообще говоря, разрывная) обладает достаточно малым колебанием на бесконечности:

$$||A(t_1) - A(t_2)|| \leqslant \alpha < \frac{2h-\gamma}{(2h\gamma^{-1})^n - 1} \quad (t_1, t_2 \geqslant t_0) \tag{5}$$

(при $\varphi(s) \equiv \alpha$ условие (3) выполняется). Качественная сторона данного результата хорошо известна: речь идет об $A(t)$, принадлежащих при любом $t \geqslant t_0$ достаточно малой окрестности постоянной матрицы со спектром в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Экспоненциальная устойчивость систем $\dot{X} = A(t)X$ в подобных ситуациях была установлена еще Ляпуновым.

Рассмотренные примеры (число их можно увеличить) иллюстрируют применение идей робастной устойчивости за пределами класса стационарных задач.

Литература

1. *Харитонов, В. Л.* Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Харитонов // *Дифференц. уравнения*. — 1978. — Т. 14, № 11. — С. 2086—2088.
2. *Харитонов, В. Л.* Проблема Рауса—Гурвица для семейства полиномов и квазиполиномов / В. Л. Харитонов // *Математическая физика*. — 1979. — № 26. — С. 69—79.

3. *Алексеев, В. М.* Об асимптотическом поведении решений слабо нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Алексеев // *ДАН СССР*. — 1960. — Т. 134, № 2. — С. 247—250.
4. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / В. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

17. О состоятельном многомерном непараметрическом критерии однородности[18]

Изучается многомерный непараметрический критерий однородности, проверяющий гипотезу о том, что несколько выборок в $\mathbb{R}^N$ соответствуют одной и той же генеральной совокупности. Статистика γ критерия связана с понятием близости выборочных элементов. Распределение γ зависит от неизвестных плотностей, т.е. γ-критерий не свободен от распределения. Но он непараметричен в том смысле, что не требует априорных предположений о плотностях. Исследование поведения $\mathbf{E}\gamma$ и $\mathbf{D}\gamma$ (асимптотика, равномерные оценки) показывает, что критерий состоятелен против любых альтернатив. Критерий применим и в бесконечномерном случае.

Так как для $N = 1$ известен ряд классических критериев однородности, основная сфера применимости критерия связана с многомерностью и отсутствием информации о распределениях.

§ 1. Введение. Основной результат

1.1. Статья посвящена классической проблеме однородности для многомерного случая. На распределения не накладывается ограничений (кроме абсолютной непрерывности), так что проблема рассматривается в непараметрической постановке.

Подробнее, рассматриваются $m(\geqslant 2)$ независимых выборок в $\mathbb{R}^N$

$$S_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

с интегрируемыми по Лебегу плотностями $p_i, \ldots, p_m$ соответственно. Проверке подлежит гипотеза однородности

$$H_0 : p_1(x) = p_2(x) = \cdots = p_m(x) \text{ почти всюду в } \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Обозначим через S объединенную выборку объема $n = n_1 + \cdots + n_m$. Как обычно, предполагается, что с ростом n величины $n_1 n^{-1}, \ldots, n_m n^{-1}$ стремятся к каким-либо ненулевым пределам:

$$n_i n^{-1} \to s_i (\neq 0), \quad i = 1, \ldots, m \qquad (n \to \infty). \tag{1.2}$$

Пусть $\theta_k \quad (0 \leqslant \theta_k \leqslant n_k)$ — число элементов выборки S_k, ближайший к которым среди остальных $n - 1$ элементов S принадлежит той же выборке $S_k \quad (k = 1, \ldots, m)$. Непрерывность распределений обеспечивает почти наверное единственность этих ближайших элементов.

[18] Левин А. Ю. О состоятельном многомерном непараметрическом критерии однородности // Моделирование и анализ информационных систем. — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 32—44.

Основной результат. *Критерий, отклоняющий гипотезу H_0 при больших значениях статистики*

$$\gamma_n = \sqrt{n}\left(\sum_1^m \frac{\theta_k}{n_k} - 1\right), \tag{1.3}$$

состоятелен против любых альтернатив.

Подробнее, имеют место два утверждения:

а) *если гипотеза H_0 верна, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать постоянную $C(\varepsilon, m)$, зависящую лишь от ε и m, такую что при всех n*

$$\mathbf{P}(\gamma_n < C(\varepsilon, m)) > 1 - \varepsilon; \tag{1.4}$$

б) *если H_0 не верна (т.е. хотя бы две из плотностей $p_1, \ldots, p_m$ различны на множестве положительной меры), то при любом C*

$$\mathbf{P}(\gamma_n < C) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1.5}$$

Критерий, основанный на этих фактах, будем называть γ-критерием. Полной однозначности здесь, правда, нет, так как имеются различные модификации в связи с пороговыми значениями (по поводу конкретизации $C(\varepsilon, m)$ и возможных уточнений см. § 6, § 7).

Ради простоты обозначений ниже обычно будем применять краткие записи типа «γ_n» (иногда опуская и сам индекс n), «$n \to \infty$», игнорируя векторный характер аргумента $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_m)$. Так, запись $n \to \infty$ означает, что речь идет о любой последовательности векторов $\bar{n} = \bar{n}(n)$, таких что сумма компонент вектора $\bar{n}(n)$ равна n $\quad (n = 1, 2, \ldots)$ и выполнено (1.2). Критерии, состоятельные против всех альтернатив, будем часто называть полностью состоятельными или просто ПС-критериями.

Будучи непараметрическим, γ-критерий не свободен от распределения: при выполнении H_0 статистика γ имеет распределение, зависящее (помимо $n_1, \ldots, n_m$) также и от размерности N и от общей плотности p_0. Равномерный характер соотношения (1.4) показывает, что эту принципиальную трудность (связанную с многомерностью) удается преодолеть.

1.2. Так как $0 \leqslant \theta_k \leqslant n_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, то выполняются очевидные неравенства $-\sqrt{n} \leqslant \gamma_n \leqslant (m-1)\sqrt{n}$. Ниже (§ 2—§ 5) устанавливаются некоторые факты, относящиеся к $\mathbf{E}\gamma_n, \mathbf{D}\gamma_n$ — как при выполнении, так и при нарушении H_0. Как следствие будут получены (§ 6) явные значения $C(\varepsilon, m)$, позволяющие отклонить H_0 (с уровнем доверия не ниже требуемого). Способ повышения количественной точности указан в § 7.

В заключительной части (§ 8) обсуждаются возможности обобщений критерия — использование различных метрик, возможность отказа от конечномерности, независимости и др.

1.3. Достоинства γ-критерия — полная состоятельность (и, следовательно, асимптотическая несмещенность), непараметричность, многомерный характер, робастность — ни в коей мере не означают, что применение его всегда целесообразно. Так, при $N = 1$ оно вряд ли оправдано, поскольку здесь имеются классические ПС-критерии однородности (Колмогорова — Смирнова, Крамера — Мизеса — Смирнова, Вальда — Волфовица, Реньи и др., см., напр., [1–7]) — также непараметрические и притом эффективно использующие специфику скалярного случая. Далее, по сравнению с многомерными критериями, состоятельными против конкретных типов альтернатив (например, с классическим критерием χ^2 или с критериями, предполагающими нормальность распределений), γ-критерий при таких альтернативах проявляет повышенную «осторожность» при отклонении H_0. Меньшая мощность его в подобных ситуациях (понятие мощности приобретает смысл при конкретизации частных случаев) есть, так сказать, плата за общность.

Применение γ-критерия представляется целесообразным, когда в многомерной задаче при отсутствии надежной информации о распределениях и альтернативах требуется выяснить, имеются ли какие-либо нарушения однородности. Естественно, слабо выраженная неоднородность выявляется лишь при выборках большого объема; с другой стороны, значительное различие распределений обнаруживается, как правило, уже при небольших выборках.

Статистика γ, по-видимому, впервые рассматривалась в [8]. Там же были приведены формулировки большинства результатов настоящей работы.

§ 2. $\mathbf{E}\gamma_n$ в случае однородности

При выполнении гипотезы H_0 $\mathbf{E}\gamma_n$ легко вычисляется. Ближайшим к элементу x_{ki} выборки S_k может равновероятно оказаться любой из $n-1$ остальных элементов S. Поэтому вероятность того, что этот ближайший элемент окажется из S_k, равна $(n_k-1)(n-1)^{-1}$. Поскольку θ_k есть сумма n_k индикаторов таких событий, то при всех k

$$\mathbf{E}\theta_k = n_k \frac{n_k-1}{n-1}, \quad \mathbf{E}\gamma_n = \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k-1}{n-1} - 1\right) = -\sqrt{n}\frac{m-1}{n-1}.$$

Итак, величина $\mathbf{E}\gamma_n$ отрицательна и стремится к 0 при $n \to \infty$.

§ 3. Асимптотика $\mathbf{E}\gamma_n$ в общем случае

3.1. Ниже будет показано, что в случае неоднородности предел $\mathbf{E}\gamma_n/\sqrt{n}$ $(n \to \infty)$, по контрасту с однородным случаем, положителен.

Через $\mathbb{R}_+^N$ здесь и далее обозначается множество таких точек Лебега (см., напр. [9]) для функций $p_1, \dots, p_m$, в которых по крайней мере одна из этих функций отлична от 0. Пусть, далее, $A_{kn}(z) = A_k(z, \bar{n})$ — событие, состоящее в том, что ближайший к $z (\in \mathbb{R}^N)$ элемент S принадлежит выборке $S_k \quad (1 \leqslant k \leqslant m)$.

Теорема 3.1. *Для любой точки* $z \in \mathbb{R}^N_+$ *и любого* $k \quad (k = 1, \ldots, m)$

$$\mathbf{P}\Big(A_{kn}(z)\Big) \to g_k(z) = \frac{s_k p_k(z)}{s_1 p_1(z) + \cdots + s_m p_m(z)}, \quad (n \to \infty). \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы 3.1 начнем с частного случая.

3.2.

Лемма 3.1. *Пусть* $p_1, \ldots, p_m$ *постоянны в некоторой окрестности* $U = U(z)$ *точки* z. *Тогда имеет место соотношение* (3.1).

Обозначим через α_n (α_{in}) число элементов выборки S (S_i), которые попадут в U $(i = 1, \ldots, m)$. Ясно, что $\alpha_n = \alpha_{1n} + \cdots + \alpha_{mn}$.

Пусть $\alpha_n > 0$. Все α_n элементов, которые попадут в U, имеют одинаковое условное распределение — а именно, равномерное в U, в силу условия леммы. Так как они, очевидно, независимы, то любой из них равновероятно с остальными может оказаться ближайшим к z. Поэтому

$$\mathbf{P}\Big(A_{kn}(z) | \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn}\Big) = \alpha_{kn} \alpha_n^{-1} \quad (\alpha_n > 0); \tag{3.2}$$

при $\alpha_n = 0$ правая часть заменяется величиной $\mathbf{P}\big(A_{kn}(z) | \alpha_n = 0\big)$ $(k = 1, \ldots, m)$, несущественной для дальнейшего.

Пусть $|U|$ — объем U. В силу (1.2) и закона (усиленного) больших чисел при любых i, k $(1 \leqslant i, k \leqslant m)$

$$\frac{\alpha_{in}}{n_i} \xrightarrow{\text{п.н.}} |U| p_i(z), \qquad (n \to \infty),$$

$$\frac{\alpha_{kn}}{\alpha_n} = \frac{n_k}{n} \cdot \frac{\alpha_{kn}}{n_k} \Big(\frac{\alpha_n}{n}\Big)^{-1} = \frac{n_k}{n} \cdot \frac{\alpha_{kn}}{n_k} \Big(\frac{n_1}{n} \cdot \frac{\alpha_{1n}}{n_1} + \cdots + \frac{n_m}{n} \cdot \frac{\alpha_{mn}}{n_m}\Big)^{-1} \xrightarrow{\text{п.н.}}$$

$$\xrightarrow{\text{п.н.}} s_k |U| p_k(z) \Big(s_1 |U| p_1(z) + \cdots + s_m |U| p_m(z)\Big)^{-1} = g_k(z) \quad (n \to \infty).$$

Поскольку $z \in \mathbb{R}^N_+$, то $\mathbf{P}(\alpha_n = 0) \to 0$ при $n \to \infty$, так что случаем $\alpha_n = 0$ можно пренебречь; итак,

$$\mathbf{P}\big(A_{kn}(z) | \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn}\big) \xrightarrow{\text{п.н.}} g_k(z) \quad (n \to \infty), k = 1, \ldots, m.$$

Случайные величины в левой части равномерно ограничены, поэтому тот же предел должны иметь их математические ожидания:

$$\mathbf{P}\Big(A_{kn}(z)\Big) = \mathbf{E}\mathbf{P}\big(A_{kn}(z) | \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn}\big) \to g_k(z) \ (n \to \infty), \ k = 1, \ldots, m.$$

Лемма 3.1 доказана.

3.3. В общем случае воспользуемся леммой 3.1 в сочетании с мажорированием и последующим предельным переходом.

Пусть v_N — объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$ (явное выражение здесь не требуется), т.е. $v_N r^N$ — объем шара радиуса r. Зафиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{R}_+^N$. Поскольку она является точкой Лебега любой из плотностей p_i, для шаров U_r радиуса r с центром в z

$$\frac{1}{v_N r^N} \int\limits_{U_r} p_i(x)dx \to p_i(z), \quad i = 1, \ldots, m \quad (r \to 0). \tag{3.3}$$

Если ξ_i обладает плотностью распределения p_i, то для функции распределения F_i скалярной величины $\| \xi_i - z \|$ имеем поэтому (при $t > 0$)

$$F_i(t) = \int\limits_{U_t} p_i(x)dx = p_i(z) v_N t^N + o(t^N) \quad (t \to 0). \tag{3.4}$$

Выберем произвольное $\varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1)$ и положим

$$a_{i1} = (1-\varepsilon) p_i(z), \quad a_{i2} = p_i(z) + \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.5}$$

Ясно, что $0 \leqslant a_{i1} \leqslant p_i(z) < a_{i2}$, причем среднее неравенство является строгим при $p_i(z) \neq 0$. Поэтому, с учетом (3.4), на некотором промежутке $[0, r], r = r(\varepsilon) > 0$, справедливы неравенства

$$a_{i1} v_N t^N \leqslant F_i(t) \leqslant a_{i2} v_N t^N \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m \quad (0 \leqslant t \leqslant r). \tag{3.6}$$

Для $i = 1, \ldots, m$ введем функции F_{i1}, F_{i2}, полагая

$$F_{i1}(t) = a_{i1} v_N t^N, \quad F_{i2}(t) = a_{i2} v_N t^N, \qquad i = 1, \ldots, m \quad (0 \leqslant t \leqslant r) \tag{3.7}$$

и продолжая их на всю числовую прямую с сохранением неравенств

$$F_{i1}(t) \leqslant F_i(t) \leqslant F_{i2}(t), \qquad i = 1, \ldots, m \quad (-\infty < t < \infty) \tag{3.8}$$

и свойств функций распределения (абсолютно непрерывных); это, очевидно, возможно. Функции распределения F_{i1}, F_{i2} соответствуют (в том же смысле, в каком F_i соответствуют p_i), в частности, N-мерным плотностям

$$p_{ij}(x) = \frac{F'_{ij}(\| x - z \|)}{N v_n \| x - z \|^{N-1}}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, 2 \quad (x \in \mathbb{R}^N). \tag{3.9}$$

Если $x \in U_z$, то $0 \leqslant \| x - z \| \leqslant r$; поэтому из (3.7), (3.9) следует, что

$$p_{ij}(x) \equiv a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, 2 \quad (x \in U_r). \tag{3.10}$$

3.4. Пусть k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ фиксировано. Наряду с задачей о предельном значении $\mathbf{P}\Big(A_{kn}(z)\Big)$, рассмотрим две вспомогательные задачи о предельных значениях $\mathbf{P}\Big(A'_{kn}(z)\Big)$, $\mathbf{P}\Big(A''_{kn}(z)\Big)$. Здесь оба события $A'_{kn}(z)$, $A''_{kn}(z)$, как и $A_{kn}(z)$, означают, что ближайшим к z элементом S будет элемент выборки S_k; разница лишь в исходных распределениях. Именно, для события $A'_{kn}(z)$ $(A''_{kn}(z))$ плотности $p_1, \dots, p_m$ заменяются соответственно вспомогательными плотностями

$$p_{11}, \dots, p_{k-11}, p_{k2}, p_{k+11}, \dots, p_{m1} \tag{3.11}$$

$$(p_{12}, \dots, p_{k-12}, p_{k1}, p_{k+12}, \dots, p_{m2}). \tag{3.12}$$

Так как $p_{i2}(z) = a_{i2} > 0 \quad (i = 1, \dots, m)$, не все функции (3.11) равны 0 в точке z; то же относится и к функциям (3.12). В силу (3.10) применима лемма 3.1, откуда

$$\mathbf{P}\Big(A'_{kn}(z)\Big) \to \frac{s_k\Big(p_k(z) + \varepsilon\Big)}{(1-\varepsilon)\sum\limits_{i \neq k} s_i p_i(z) + s_k\Big(p_k(z) + \varepsilon\Big)} \qquad (n \to \infty), \tag{3.13}$$

$$\mathbf{P}\Big(A''_{kn}(z)\Big) \to \frac{(1-\varepsilon) s_k p_k(z)}{\sum\limits_{i \neq k} s_i\Big(p_i(z) + \varepsilon\Big) + (1-\varepsilon) s_k p_k(z)} \qquad (n \to \infty). \tag{3.14}$$

3.5.

Лемма 3.2. *При любых k, n справедлива двусторонняя оценка*

$$\mathbf{P}\Big(A''_{kn}\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(A_{kn}\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(A'_{kn}\Big). \tag{3.15}$$

Ввиду аналогии ограничимся доказательством второго неравенства. Пусть $\xi_{i1}, \dots, \xi_{in_i}$ — расстояния от z до соответствующих элементов выборки S_i. Эти n_i случайных величин имеют введенную выше функцию распределения F_i и независимы. Положим еще

$$\xi_i = \min\{\xi_{i1}, \dots, \xi_{in_i}\}, \ i = 1, \dots, m; \quad \xi = \min\{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_m\},$$

а $\xi'_{i1}, \dots, \xi'_{in_i}, \xi'_i, \xi'$ имеют аналогичный смысл, но при плотностях (3.11) (вместо $p_1, \dots, p_m$).

Любая из величин $\xi'_{k1}, \dots, \xi'_{kn_k}$ имеет функцию распределения $F_{k2}(t) \geqslant F_k(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ и поэтому ξ'_k стохастически не больше ξ_k (что сразу следует из выражения для функции распределения минимума).

Повторяя то же соображение, заключаем, что при $i \neq k \quad \xi'_{il}$ стохастически не меньше ξ_{il} (с учетом неравенства $F_i \geqslant F_{i1}$) и, следовательно, ξ' стохастически не меньше ξ. Величины, входящие в неравенство

$$\mathbf{P}(\xi_k < \xi) \leqslant \mathbf{P}(\xi'_k < \xi') \tag{3.16}$$

независимы, причем $\xi'_k(\xi)$ стохастически не больше $\xi_k(\xi')$. Итак, (3.16), т.е. второе из неравенств (3.15), справедливо. Лемма 3.2 доказана.

Осталось заметить, что при $\varepsilon \to 0$ правые части (3.15) и (3.16) стремятся к правой части (3.1). Переход к пределу при $n \to \infty, \varepsilon \to 0$ с учетом леммы 3.2, завершает доказательство теоремы 3.1.

Она допускает прозрачную интерпретацию: для выборок S_k предельные вероятности содержат ближайший (среди всех выборочных) элемент к фиксированной «хорошей» точке z, пропорциональны ожидаемым количествам элементов S_k в малой окрестности $z \quad (k = 1, \dots, m)$.

3.6. Пусть B_{kjn} — событие, состоящее в том, что ближайший к x_{kj} среди $n-1$ остальных элементов S окажется в выборке S_k.

Следствие 3.1. *При любых k, j и любом $x \in \mathbb{R}^N_+$*

$$\mathbf{P}\Big(B_{kjn}/x_{kj} = x\Big) \to g_k(x) \quad (n \to \infty). \tag{3.17}$$

В самом деле, единственное различие по сравнению с теоремой 3.1 состоит в том, что здесь из выборки S_k исключается элемент x_{kj}, так что объем n_k этой выборки должен быть теперь заменен на $n_k - 1$. Эта деталь несущественна для асимптотики левой части (3.17) при $n \to \infty$.

3.7. Откажемся теперь от фиксации x_{kj} и вернемся к априорной интерпретации x_{kj} как случайной величины.

Следствие 3.2. *При любых k, j (dx — элемент объема в $\mathbb{R}^N$)*

$$\mathbf{P}\Big(B_{kjn}\Big) \to \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} g_k(x) p_k(x)\, dx \qquad (n \to \infty). \tag{3.18}$$

Действительно, по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P}\Big(B_{kjn}\Big) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \mathbf{P}\Big(B_{kjn}/x_{kj} = x\Big) p_k(x)\, dx, \quad j = 1, \dots, n_k. \tag{3.19}$$

Интегрирование по $\mathbb{R}^N_+$ вместо $\mathbb{R}^N$ оправдано: можно ограничиться интегрированием лишь по тем x, где $p_k(x) > 0$, и, кроме того, почти все точки

$\mathbb{R}^N$ являются точками Лебега суммируемых функций $p_1, \ldots, p_m$ (см. [9]). Далее, подынтегральные функции в (3.19) имеют общую суммируемую в $\mathbb{R}^N_+$ мажоранту $p_k(x)$. Поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла, и (3.19) с учетом (3.17) дает (3.18).

3.8. Вернемся к статистике γ_n. Пусть I_{kj} — индикатор события $B_{kj} = B_{kjn}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\theta_k = \mathbf{E}\Big(\sum_{j=1}^{n_k} I_{kj}\Big) = \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{P}(B_{kj}) = n_k \mathbf{P}(B_{k1}) \to n_k \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} g_k(x) p_k(x) dx,$$

$$\mathbf{E}\Big(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\Big) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathbf{E}\theta_k}{n_k} - 1 \to \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{s_1 p_1^2(x) + \cdots + s_m p_m^2(x)}{s_1 p_1(x) + \cdots + s_m p_m(x)} dx - 1. \qquad (3.20)$$

3.9.

Следствие 3.3. *При невыполнении гипотезы* H_0

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\Big) > 0. \qquad (3.21)$$

Для доказательства воспользуемся неравенством Коши:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} s_i p_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{s_i} \cdot \sqrt{s_i p_i^2}\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} s_i p_i^2, \qquad (3.22)$$

поскольку сумма всех s_i равна 1. При этом на множестве положительной меры знак неравенства в (3.22) должен быть строгим. Иначе оказалось бы, что почти всюду пропорциональны векторы

$$(\sqrt{s_1}, \ldots, \sqrt{s_m}), \ \Big(\sqrt{s_1 p_1^2(x)}, \ldots, \sqrt{s_m p_m^2(x)}\Big),$$

т.е. $p_1(x) = \cdots = p_m(x)$, что противоречит предположению.

С учетом (3.20), (3.22) получаем требуемое неравенство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\Big) > \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\Big(s_1 p_1(x) + \cdots + s_m p_m(x)\Big)^2}{s_1 p_1(x) + \cdots + s_m p_m(x)} dx - 1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(s_1 p_1(x) + \cdots + s_m p_m(x)\Big) dx - 1 = s_1 + \cdots + s_m - 1 = 0.$$

§ 4. Оценка $\mathrm{D}\gamma_n$ при гипотезе H_0

4.1. В § 3 изучались вопросы асимптотики (при $n \to \infty$), тогда как ниже рассматриваются значения $\mathbf{D}\gamma_n$ при произвольных n.

Теорема 4.1. *Если справедлива гипотеза H_0, то при любом $n(\geqslant 4)$*

$$\mathbf{D}\gamma_n \leqslant \frac{2(n-m)(m-1)}{n-3} \quad (n \geqslant 4). \tag{4.1}$$

Правая часть здесь не превосходит $4(m-1)$ и с ростом n сходится к $2(m-1)$. Неравенство (4.1) будет получено как следствие более точной (но и более громоздкой) оценки, куда входят $n_1, \ldots, n_m$.

Из определения γ_n непосредственно следует, что

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}\gamma_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n_k^2}\mathbf{D}\theta_k + \sum_{r \neq s} \frac{1}{n_r n_s}\mathrm{cov}(\theta_r, \theta_s). \tag{4.2}$$

Переход от (4.2) к (4.1) требует достаточно точных оценок для слагаемых в правой части (4.2). Этому посвящены последующие пункты.

4.2. Итак, пусть выполнена гипотеза H_0, т.е. все n элементов различных выборок S_i имеют одну и ту же плотность $p(x)$. Введем ряд обозначений. Прежде всего удобно избавиться от двойной индексации элементов x_{ik} и обозначать их просто как $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом множество индексов $H_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ отвечает элементам выборки S_1 и т.д., вплоть до множества $H_m = \{n - n_m + 1, \ldots, n\}$, отвечающего выборке S_m. Ближайший к x_i среди остальных $n-1$ элементов S обозначим через $f(x_i)$, а индикатор события $f(x_i) = x_j$ — через I_{ij}. (Отметим, что эти индикаторы, вообще говоря, зависимы).

Очевидно, $I_{ii} = 0$, $\mathbf{E}I_{ij} = (n-1)^{-1}$ при $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$.

Положим также

$$a = \mathbf{E}\Big(I_{12}I_{34}\Big),\ b = \mathbf{E}\Big(I_{12}I_{23}\Big),\ c = \mathbf{E}\Big(I_{12}I_{32}\Big),\ d = \mathbf{E}\Big(I_{12}I_{21}\Big). \tag{4.3}$$

Поскольку все x_i одинаково распределены и независимы, их совместное распределение перестановочно (т.е. симметрично). Поэтому $\mathbf{E}\big(I_{ij}I_{kl}\big) = a$ при любых различных индексах i, j, k, l, $\mathbf{E}\big(I_{ij}I_{jk}\big) = b$ при любых различных индексах i, j, k и т.д.

4.3. Величины (4.3) зависят от плотности p; число их можно сократить до двух, поскольку

$$(n-2)b + d = (n-3)a + b + c = (n-1)^{-1}. \tag{4.4}$$

В самом деле, индикаторы $I_{12}, I_{13}, \ldots, I_{1n}$ отвечают событиям, образующим разбиение. Следовательно (так как $\mathbf{E}(I_{23}I_{12}) = b$),

$$(n-1)^{-1} = \mathbf{E}I_{21} = \mathbf{E}(I_{21}I_{12}) + \cdots + \mathbf{E}(I_{21}I_{1n}) = d + (n-2)b,$$

$$(n-1)^{-1} = \mathbf{E}I_{23} = \mathbf{E}(I_{23}I_{12}) + \mathbf{E}(I_{23}I_{13}) + \cdots + \mathbf{E}(I_{23}I_{1n}) = b + c + (n-3)a.$$

4.4. Как уже отмечалось в § 2, при любом k

$$\theta_k = \sum_{i,j \in H_k} I_{ij}, \quad \mathbf{E}\theta_k = \sum_{i,j \in H_k} \mathbf{E}I_{ij} = \frac{n_k(n_k-1)}{n-1} \tag{4.5}$$

Переходя к ковариациям величин θ_k, заметим, что, в силу (4.5)

$$\mathbf{E}(\theta_r\theta_s) = \sum_{i,j \in H_r} \sum_{k,l \in H_s} \mathbf{E}(I_{ij}I_{kl}). \tag{4.6}$$

При $r \neq s$ множества H_r и H_s не пересекаются, так что все ненулевые слагаемые (отвечающие неравенствам $i \neq j, k \neq l$) равны a. Число их, очевидно, есть $n_r(n_r-1)n_s(n_s-1)$. С учетом (4.5) имеем при $r \neq s$

$$\operatorname{cov}\Big(\theta_r, \theta_s\Big) = n_r(n_r-1)n_s(n_s-1)a - \frac{n_r(n_r-1)n_s(n_s-1)}{(n-1)^2} =$$
$$= n_r n_s(n_r-1)(n_s-1)\Big(a - \frac{1}{(n-1)^2}\Big) \quad (1 \leqslant r, s \leqslant m, \quad r \neq s).$$

Отсюда находим второе слагаемое в (4.2):

$$\sum_{r \neq s} \frac{1}{n_r n_s} \operatorname{cov}\Big(\theta_r, \theta_s\Big) = \Big(a - \frac{1}{(n-1)^2}\Big) \sum_{r \neq s} (n_r-1)(n_s-1) =$$
$$= \Big(a - \frac{1}{(n-1)^2}\Big)\Big(\sum_{r=1}^{m}(n_r-1)(n-n_r) - (m-1)(n-m)\Big). \tag{4.7}$$

4.5. Переходим к первому слагаемому. При $r = s$ (4.6) принимает вид

$$\mathbf{E}\theta_r^2 = \sum_{i,j,k,l \in H_r} \mathbf{E}(I_{ij}I_{kl}). \tag{4.8}$$

Здесь счет усложняется, т.к. ненулевые слагаемые уже не совпадают.

Отбросим нулевые слагаемые, возникающие, если $i = j$ или $k = l$ или $i = k, j \neq l$. Слагаемые с $i = k, j = l$ дают вклад

$$\sum_{i,j \in H_r} \mathbf{E}I_{ij}^2 = \sum_{i,j \in H_r} \mathbf{E}I_{ij} = \frac{n_r(n_r-1)}{n-1}\Big(= \mathbf{E}\theta_r\Big).$$

Остальные слагаемые имеют один из типов a, b, c, d и количества их равны соответственно

$$n_r(n_r-1)(n_r-2)(n_r-3); 2n_r(n_r-1)(n_r-2); n_r(n_r-1)(n_r-2); n_r(n_r-1).$$

Суммируя, находим $\mathbf{E}\theta_r^2$, откуда с учетом (4.5)

$$\mathbf{D}\theta_r = n_r(n_r-1)\Big(\frac{1}{n-1}+(n_r-2)(n_r-3)a+(n_r-2)(2b+c)+d\Big)-\frac{n_r^2(n_r-1)^2}{(n-1)^2}.$$

Ввиду (4.4) можно выразить $\mathbf{D}\theta_r \quad (r=1,\ldots,m)$ лишь через a и b:

$$\mathbf{D}\theta_r = n_r(n_r-1)\Bigg((n_r-2)(n_r-3)a+(n_r-2)\Big(b-(n-3)a+\frac{1}{n-1}\Big)-(n-2)b+$$

$$+\frac{2}{n-1}-\frac{n_r(n_r-1)}{(n-1)^2}\Bigg) = n_r(n_r-1)(n-n_r)\Bigg(\frac{n_r}{(n-1)^2}-(n_r-2)a-b\Bigg). \quad (4.9)$$

4.6. Объединяя (4.2), (4.7) и (4.9), находим

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}\gamma_n = \sum_{k=1}^{m}\frac{(n_k-1)(n-n_k)}{n_k}\Bigg(\frac{n_k}{(n-1)^2}-(n_k-2)a-b\Bigg)+$$
$$+\Bigg(a-\frac{1}{(n-1)^2}\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{m}(n_k-1)(n-n_k)-(m-1)(n-m)\Bigg) =$$
$$= \frac{(m-1)(n-m)}{(n-1)^2}+\lambda_1 a-\lambda_2 b \quad (4.10)$$

с положительными коэффициентами

$$\lambda_1 = mn-n+m^2+m-2n\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n_k}, \quad \lambda_2 = \sum_{k=1}^{m}\frac{(n_k-1)(n-n_k)}{n_k}.$$

Положительность λ_1 усматривается из неравенства

$$n\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n_k} = (n_1+\cdots+n_m)\big(\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_m}\big) = 1+\frac{n_1}{n_2}+\cdots+\frac{n_m}{n_{m-1}}+1 \leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{n_1}{2}+\cdots+\frac{n_m}{2}+1 = m+\frac{1}{2}(m-1)n.$$

4.7. В (4.10) $\mathbf{D}\gamma_n$ выражена через величины a, b (как правило, неизвестные). Избавимся от них, переходя к неравенству. В силу (4.4) $a \leqslant (n-1)^{-1} \times$ $\times\, (n-3)^{-1}$. Поскольку $\lambda_1, \lambda_2, b \geqslant 0$, имеем оценку

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}\gamma_n \leqslant \frac{(m-1)(n-m)}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)(n-3)}\Big(mn - n + m^2 + m - 2n\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n_k}\Big).$$

Так как $n_1 + \cdots + n_m = n$ и все n_i положительны, сумма величин, обратных к $n_1, \ldots, n_m$, не меньше, чем $m^2 n^{-1}$. Отсюда непосредственно следует теорема 4.1:

$$\mathbf{D}\gamma_n \leqslant n\bigg(\frac{(m-1)(n-m)}{(n-1)^2} + \frac{(m-1)(n-m)}{(n-1)(n-3)}\bigg) \leqslant \frac{2(m-1)(n-m)}{n-3}.$$

§ 5. Асимптотическая оценка сверху $\mathrm{D}\gamma_n$ в общем случае

5.1. Рассмотрим теперь поведение $\mathbf{D}\gamma_n$ без предположения об однородности. Ограничимся следующим предложением.

Теорема 5.1. *Имеет место оценка*

$$\mathbf{D}\gamma_n = o(n) \quad (n \to \infty). \tag{5.1}$$

В связи с перенумерацией элементов в п. 4.2 сейчас удобно ввести дополнительную индексацию также для выборок и их объемов. Положим для любого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ $S^k = S_i$, $n^k = n_i$, если $x_k \in S_i$ (например, $S^1 = \cdots = S^{n_1} = S_1$, $n^1 = \cdots = n^{n_1} = n_1$ и т.д.). Пусть I_k есть индикатор события $f(x_k) \in S^k$, где, как и ранее, $f(x_k)$ — ближайший к x_k среди $n-1$ остальных элементов S $\quad (k = 1, \cdots, n)$. В этих обозначениях

$$\gamma_n = \sqrt{n}\bigg(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^k}I_k - 1\bigg).$$

5.2. Теорема 5.1 будет доказана, если мы проверим, что

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n^k)^2}\mathbf{D}I_k + \sum_{i\neq j}\frac{1}{n^i n^j}\operatorname{cov}(I_i, I_j) = \Sigma_1 + \Sigma_2 = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Можно ограничиться слагаемым Σ_2, так как $\Sigma_1 = O(n^{-1}) \quad (n \to \infty)$.

Пусть $c_{qr} = \operatorname{cov}(I_i, I_j)$ при всех i, j таких, что $i \neq j, x_i \in S_q, x_j \in S_r$. Каждой неупорядоченной паре выборок S_q, S_r при $q \neq r$ в сумме Σ_2 отвечает

$2n_q n_r$ одинаковых слагаемых, равных $n_q^{-1} n_r^{-1} c_{qr}$, а при $q = r - n_r(n_r - 1)$ одинаковых слагаемых, равных $n_r^{-2} c_{rr}$. Отсюда

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{q,r=1}^{m} |c_{qr}|.$$

При любом n в правую часть в качестве слагаемых входит фиксированное число (а именно, m^2) ковариаций. Поэтому бесконечная малость Σ_2 при $n \to \infty$ вытекает из следующего факта.

Лемма 5.1. *При всех q, r имеет место соотношение*

$$c_{qr} \to 0 \quad (n \to \infty; \quad 1 \leqslant q, r \leqslant m).$$

Данное утверждение достаточно прозрачно: вряд ли может вызвать сомнение тот факт, что с ростом n зависимость между различными индикаторами сходит на нет. Итак, на «интуитивном» уровне теорему 5.1 можно считать подтвержденной.

5.3. Для полноты приведем подробное доказательство леммы 5.1.

Зафиксируем индексы q, r, а также точки $z', z'' \in \mathbb{R}^N$ такие, что

$$z' \neq z'', \quad z', z'' \in \mathbb{R}_+^N, \quad p_q(z') > 0, p_r(z'') > 0. \tag{5.2}$$

Выберем разбиение $\mathbb{R}^N$ на непересекающиеся борелевские множества H', H'' такие, что $z'(z'')$ — внутренняя точка $H'(H'')$ и

$$b_k^{'} = \int\limits_{H'} p_k(x)dx \neq 0, \quad b_k^{''} = \int\limits_{H''} p_k(x)dx (= 1 - b_k^{'}) \neq 0, \quad k = 1, \cdots, m$$

(что, очевидно, возможно). Положим далее,

$$b' = s_1 b_1^{'} + \cdots + s_m b_m^{'}, \quad b'' = s_1 b_1^{''} + \cdots + s_m b_m^{''} (= 1 - b'),$$

$$s_k^{'} = s_k b_k^{'} (b^{'})^{-1}, \quad s_k^{''} = s_k b_k^{''} (b^{''})^{-1}, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{5.3}$$

В соответствии с разбиением $\mathbb{R}^N$, каждая из выборок $S_1, \cdots, S_m, S$ также разбивается на две «подвыборки» ${S_1}^{'}$ и ${S_1}^{''}, \cdots, {S_m}^{'}$ и ${S_m}^{''}, S'$ и S'' из элементов, которые попадут в H' и H'' соответственно. Объемы этих подвыборок обозначим через ${n_1}^{'}$ и ${n_1}^{''}, \cdots, {n_m}^{'}$ и ${n_m}^{''}, n'$ и n''. Эти объемы — случайные величины и связаны очевидными соотношениями

$$n_k^{'} + n_k^{''} = n_k \quad (k = 1, \cdots, m), \quad n' + n'' = n. \tag{5.4}$$

При этом, согласно закону больших чисел, почти наверное

$$\frac{n_k^{'}}{n_k} \to b_k^{'}, \quad \frac{n_k^{''}}{n_k} \to b_k^{''}, \quad \frac{n'}{n} \to b', \quad \frac{n''}{n} \to b'' \quad (n \to \infty). \tag{5.5}$$

Элементы выборок $S_k^{'}, S_k^{''}$ обладают сосредоточенными в H', H'' соответственно плотностями $\quad (k = 1, \ldots, m)$

$$p_k^{'}(z) = (b_k^{'})^{-1} p_k(z) \quad (z \in H'), \quad p_k^{''}(z) = (b_k^{''})^{-1} p_k(z) \quad (z \in H''). \tag{5.6}$$

Далее, элементы выборок $S_1^{'}, \ldots, S_m^{'}(S_1^{''}, \ldots, S_m^{''})$, очевидно, независимы. Роль величин s_k играют здесь определенные в (5.3) величины $s_k^{'}(s_k^{''})$. В самом деле, в силу (5.5) (для $s_k^{''}$ выкладка аналогична)

$$\frac{n_k^{'}}{n'} = \frac{n_k}{n}\frac{n_k^{'}}{n_k}\frac{n}{n'} \quad \xrightarrow{\text{п.н.}} \quad \frac{s_k b_k^{'}}{b'} = s_k^{'} \quad (n \to \infty), \quad k = 1, \cdots, m. \tag{5.7}$$

Итак, к «просеянным» выборкам $S_1^{'}, \cdots, S_m^{'} \quad (S_1^{''}, \cdots, S_m^{''})$ применимы результаты § 3 с заменой p_k, n, n_k, s_k на $p_k^{'}, n', n_k^{'}, s_k^{'}$ $(p_k^{''}, n'', n_k^{''}, s_k^{''})$. Различие состоит в том, что объемы выборок теперь случайны и обычная сходимость $n_k n^{-1}$ к s_k заменена п.-н.-сходимостью в (5.7). Это, однако, не играет роли: для соответствующих разделов § 3 имели значение лишь количества — заведомо случайные — элементов различных выборок $S_1, \cdots, S_m$, попавших в окрестность некоторой точки z.

Пусть событие $A_k^{'}(z)\,\big(A_k^{''}(z)\big)$ состоит в том, что ближайший к z элемент $S'\,(S'')$ принадлежит $S_k^{'}\,(S_k^{''})$. Теорема 3.1 с учетом (5.3), (5.6) дает

$$\mathbf{P}\big(A_q^{'}(z')\big) \to s_q^{'} p_q^{'}(z') \Big(s_1^{'} p_1^{'}(z') + \cdots + s_m^{'} p_m^{'}(z')\Big)^{-1} = g_q(z'), \tag{5.8}$$

$$\mathbf{P}\big(A_r^{''}(z'')\big) \to s_r^{''} p_r^{''}(z'') \Big(s_1^{''} p_1^{''}(z'') + \cdots + s_m^{''} p_m^{''}(z'')\Big)^{-1} = g_r(z'') \tag{5.9}$$

(при $n \to \infty$). События $A_q^{'}(z'), A_r^{''}(z'')$ зависимы (хотя области H', H'', как и выборки S', S'', не пересекаются); причиной зависимости является лишь связь (5.4) между величинами $n_k^{'}$ и $n_k^{''}, k = 1, \cdots, m$. Поэтому $A_q^{'}(z'), A_r^{''}(z'')$ условно независимы при данном $\vec{n}^{'} = (n_1^{'}, \cdots, n_m^{'})$:

$$\mathbf{P}\big(A_q^{'}(z') A_r^{''}(z'') | \vec{n}^{'}\big) = \mathbf{P}\big(A_q^{'}(z') | \vec{n}^{'}\big) \mathbf{P}\big(A_r^{''}(z'') | \vec{n}^{'}\big). \tag{5.10}$$

В силу (5.7) для почти любой последовательности $\vec{n}_1^{'}, \vec{n}_2^{'}, \cdots$ применима теорема 3.1, так что с учетом (5.10)

$$\mathbf{P}\big(A_q^{'}(z') | \vec{n}_n^{'}\big) \overset{\text{п.н.}}{\to} g_q(z'), \quad \mathbf{P}\big(A_r^{''}(z'') | \vec{n}_n^{'}\big) \xrightarrow{\text{п.н.}} g_r(z'') \quad (n \to \infty),$$

$$\mathbf{P}\big(A_q^{'}(z')A_r^{''}(z'')|\vec{n}_n^{'}\big) \xrightarrow{\text{п.н.}} g_q(z')g_r(z'') \quad (n\to\infty).$$

Из п.-н.-сходимости к константе равномерно ограниченных случайных величин следует сходимость к той же константе их средних:

$$\mathbf{P}\big(A_q^{'}(z')A_r^{''}(z'')\big) = \mathbf{EP}\big(A_q^{'}(z')A_r^{''}(z'')|\vec{n}_n^{'}\big) \to g_q(z')g_r(z'') \tag{5.11}$$

при $n\to\infty$. Далее, пусть $A_k(z)$ — событие $f(z)\in S_k \quad (k=1,\cdots,m)$, где $f(z)$ есть ближайший к z элемент выборки S. В случае $z\in\mathbb{R}_+^N$

$$f(z)=f_n(z)\xrightarrow{\text{п.н.}} z \quad (n\to\infty). \tag{5.12}$$

Если, скажем, $p_k(z)>0$, то в любой окрестности точки z почти наверное найдутся элементы из S_k, так как они независимы и имеют одну и ту же ненулевую вероятность попадания в окрестность. Отсюда следует (5.12). Так как $z'(z'')$ — внутренняя точка $H'(H'')$, то почти наверное $A_q^{'}(z') = A_q(z'), A_r^{''}(z'')=A_r(z'')$ для всех достаточно больших n.

Итак, предельные вероятности при $n\to\infty$ для событий $A_q(z')$, $A_r(z'')$, $A_q(z')A_r(z'')$ совпадают с найденными предельными вероятностями для $A_q^{'}(z')$, $A_r^{''}(z')$, $A_q^{'}(z')A_r^{''}(z')$ соответственно (п.-н.-сходимость индикаторов влечет сходимость их математических ожиданий). С учетом (5.8), (5.9), (5.11) имеем поэтому при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\big(A_q(z')A_r(z'')\big) - \mathbf{P}\big(A_q(z')\big)\mathbf{P}\big(A_r(z'')\big)\to 0. \tag{5.13}$$

Пусть $x_i\in S_q, x_j\in S_r$. Величина $c_{qr}=\operatorname{cov}(I_i,I_j)$, равная

$$\mathbf{P}\big(f(x_i)\in S_q, f(x_j)\in S_r\big) - \mathbf{P}\big(f(x_i)\in S_q\big)\mathbf{P}\big(f(x_j)\in S_r\big), \tag{5.14}$$

представляется интегралом I_n по $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ от функции

$$\Big(\mathbf{P}\big(A_q(z')A_r(z'')\big) - \mathbf{P}\big(A_q(z')\big)\mathbf{P}\big(A_r(z'')\big)\Big)p_q(z')p_r(z''). \tag{5.15}$$

В (5.15) по сравнению с (5.14) n_q, n_r, если $q\neq r$, уменьшаются на 1 в связи с исключением «текущих» значений $x_i=z', x_j=z''$ (при $q=r \quad n_q$ уменьшается на 2). Это не влияет на предел (5.14) при $n\to\infty$. Итак, достаточно убедиться, что $I_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Подынтегральная функция $\varphi(z',z'')=\varphi_n(z',z'')$ имеет суммируемую в $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ мажоранту $p_q(z')p_r(z'')$. Остается показать, что $\varphi_n(z',z'')\to 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ при $n\to\infty$. Для пар (z',z'') таких, что $p_q(z')p_r(z'') = 0$, это тривиально. «Диагональ» $z'=z''$ имеет нулевую меру; то же относится к множеству пар (z',z'') таких, что z' или z'' не является лебеговой точкой для одной из плотностей $p_1,\cdots,p_m$. Остальные пары $(z',z'')\in \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ удовлетворяют условиям (5.2) и для них нужное соотношение получено в (5.13).

Лемма 5.1 доказана. Это завершает и обоснование теоремы 5.1.

§ 6. Доказательство основного результата

6.1. Начнем с утверждения а), относящегося к случаю однородности. Согласно результатам § 2 и § 4 (теорема 4.1) в этом случае

$$\mathbf{E}\gamma_n = -\sqrt{n}\frac{m-1}{n-1}(<0), \quad \mathbf{D}\gamma_n \leqslant \frac{2(n-m)(m-1)}{n-3} \leqslant 4(m-1).$$

Утверждение а) следует из неравенства Чебышева; в качестве $C(\varepsilon, m)$ можно выбрать величины $2\sqrt{(m-1)\varepsilon^{-1}}$ (они могут быть уменьшены).

В случае неоднородности, согласно (3.21) и (5.1), имеем

$$\mathbf{E}\Big(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\Big) \to \alpha, \quad \mathbf{D}\Big(\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\Big) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где α — некоторая положительная постоянная. Итак, $\gamma_n/\sqrt{n}$ п.н. сходится к $\alpha(>0)$. Отсюда сразу следует утверждение б).

Результат, названный выше основным, полностью доказан.

§ 7. О количественных уточнениях

7.1. С качественной точки зрения основной результат устанавливает некоторое — теоретически достаточно важное — свойство статистики γ; доказательство носит конструктивный характер, т.к. подходящие значения $C(\varepsilon, m)$ явно указываются. Однако существует и количественная сторона дела, особенно важная в приложениях. С этой точки зрения полученная простая формула для возможных пороговых значений (а именно, $2\sqrt{(m-1)\varepsilon^{-1}}$) является не лучшим вариантом. Она, как отмечалось, дает завышенные пороговые значения, т.е. вероятности ошибок первого рода фактически оказываются меньше — и обычно существенно меньше — чем ε. Это, естественно, ведет к увеличению ошибок второго рода (при тех или иных альтернативах), т.е. к понижению чувствительности критерия при отклонениях от однородности.

Некоторые напрашивающиеся способы уточнения, будучи небесполезными в отдельных ситуациях, не позволяют, однако, снять данную трудность. Так, возвращение к более точным (и более громоздким) оценкам для $D\gamma$ не дает значительного эффекта. Попытка использовать вместо неравенства Чебышева асимптотическую нормальность γ_n (еще нуждающуюся в строгом обосновании) бесполезна для небольших выборок, да и для больших менее эффективна, чем обычно, — ведь для $D\gamma_n$ известна лишь оценка сверху. Что касается употребительных на практике правил типа «3σ», то их дефектом является, как известно, отсутствие четкого представления о размере критерия.

7.2. Радикального решения вопроса можно добиться на другом пути. Он не приводит к какой-либо простой и «оптимальной» во всех случаях формуле для пороговых значений, поскольку носит алгоритмический характер. Речь идет о перестановочном методе, восходящем еще к Фишеру (подробнее, см., например, [3, 5]). Перестановочный подход применялся, главным образом, в скалярном случае, но здесь многомерность не создает принципиальных трудностей. Для удобства читателей напомним этот подход в общих чертах.

Обозначим через $\{S\}$, $\{S_i\}$ множества элементов выборок S, S_i $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть, далее, S^0 — наблюдаемая реализация выборки S; соответствующее S^0 значение критической статистики обозначим через γ^0. Для нахождения в данной ситуации вероятности ошибки первого рода (при отклонении H_0) будем рассуждать следующим образом. Пусть гипотеза H_0 выполняется. Генерирование выборки S можно представить как два последовательных этапа: на первом этапе генерируется множество $\{S\}$, на втором равновероятно выбирается одно из разбиений $\{S\}$ на m множеств

$$\{S\} = \{S_1\} \cup \cdots \cup \{S_m\} \quad (|S_i| = n_i, \quad i = 1, \ldots, m). \tag{7.1}$$

Равновероятность является следствием H_0: все выборочные элементы равноправны, поэтому каждое из разбиений (7.1) имеет одну и ту же вероятность $n_1! \cdots n_m!(n!)^{-1}$. Каждому разбиению и соответствующим «виртуальным» подвыборкам $S_1, \cdots, S_m$ отвечает свое значение γ.

Представим себе, что в нашем случае первый этап уже выполнен, а второй еще нет, т.е. $\{S^0\}$ фиксировано, а γ пока является случайной величиной, распределение которой (фактически условное) однозначно определено и не зависит от p_0. Основную роль далее играет условная вероятность

$$\varepsilon = P(\gamma \geqslant \gamma^0 | \{S^0\}).$$

Если отклонять гипотезу H_0 в случае $\gamma \geqslant \gamma^0$, то ε становится, таким образом, условным размером критерия (условие $\{S\} = \{S^0\}$ имеет нулевую вероятность, что здесь несущественно).

При реализациях малых выборок значение ε зачастую удается вычислить точно, используя комбинаторные соображения или полный перебор. Однако высокая точность здесь обычно не требуется, так что естественным общим способом приближенного вычисления ε является метод Монте-Карло.

Величина ε является адекватной мерой степени достоверности H_0; если H_0 отклоняется при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ (где ε_1 — заданный пороговый размер), то и безусловный размер критерия при любой p_0 также не превосходит ε_1. (Ввиду произвольности ε_1 значение ε, очевидно, более информативно, чем сам факт отклонения или неотклонения H_0).

Если требуется получить критерий точно (или почти точно) заданного размера, то следует преодолеть еще некоторые технические трудности.

Дело в том, что перестановочное распределение дискретно (так же как и выборочное распределение, возникающее при применении метода Монте-Карло). Поэтому, если критическая область имеет вид $\gamma \geqslant c$, то размер критерия может принимать лишь конечное число значений (расположенных обычно достаточно «густо»). Эта трудность, естественно, преодолевается с помощью рандомизации.

Преимущества перестановочного метода очевидны — это его точность и общность. В частности, не требуется никаких ограничений на объем выборок; отметим также, что данный подход не связан с конкретным видом критической статистики. Алгоритмический характер не может считаться принципиальным недостатком, тем более, что трудоемкость перестановочного метода вполне приемлема.

§ 8. О возможных обобщениях

8.1. В заключение остановимся на ряде обобщений, представляющих определенный интерес.

Естественно считать, что близость элементов определяется стандартной евклидовой нормой в $\mathbb{R}^N$. Однако фактически все остается справедливым и для других норм — скажем, для максимума модулей компонент и т.п.

Линейность пространства также несущественна; векторные операции встречались лишь в выражении $\| x - y \|$, т.е. для обозначения расстояния. Правда, на произвольные метрические пространства основной результат не распространяется (легко указать контрпримеры для несепарабельного случая).

Основной результат сохраняет силу для вырожденных распределений, сосредоточенных на некоторых N_1-мерных многообразиях в $\mathbb{R}^N$ с N_1-мерными плотностями ($1 \leqslant N_1 < N$). (Интересны, в частности, распределения на сфере). Априорной информации об этих многообразиях, как и о самом факте вырожденности, не требуется.

8.2. Что касается распределений общего типа, то уже для формальной применимости γ-критерия нужна единственность (почти наверное) ближайшего элемента. Если таковая отсутствует (скажем, в дискретном случае), то возможна рандомизация, т.е. равновероятный выбор одного из претендентов. Поскольку для этой цели применимы малые непрерывные, независимые и одинаково распределенные возмущения — что возвращает нас к непрерывному случаю — значение $\mathbf{E}\gamma_n$ и оценка (4.1) для $\mathbf{D}\gamma_n$ (при H_0) сохраняются.

Отсюда нетрудно перейти к более удобной — и уже не рандомизированной — модификации γ-критерия. Именно, пусть для любых i, j элемент

x_{ij} имеет r_{ij} ближайших среди $n-1$ остальных элементов S (при совпадениях подсчет ведется с учетом «кратности»), из которых r'_{ij} принадлежат выборке S_i. Определим статистику γ'_n той же формулой (1.3), где теперь

$$\theta_i = \frac{r'_{i1}}{r_{i1}} + \cdots + \frac{r'_{in_i}}{r_{in_i}} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Это — обобщение γ_n на случай неединственности ближайших (для непрерывных распределений γ_n и γ'_n совпадают почти наверное). Рассмотрим события, определяющие для всех элементов выборки S совокупности ближайших к ним элементов S. Данные $(2^{n-1}-1)^n$ событий индуцируют разбиение пространства выборок, причем γ'_n есть условное математическое ожидание γ_n относительно этого разбиения. Следовательно (см., напр., [10]), $\mathbf{E}\gamma'_n = \mathbf{E}\gamma_n, \mathbf{D}\gamma'_n \leqslant \mathbf{D}\gamma_n$ (так что теорема 4.1 остается в силе).

8.3. Сфера применимости γ-критерия (или γ'-критерия) радикально расширяется, если отказаться от жесткого требования полной состоятельности. Из утверждений а), б) (см. § 1) важно теперь лишь первое, основанное на теореме 4.1, доказанной без существенных ограничений. Теперь критерий может применяться в произвольном метрическом пространстве (с оговорками по поводу измеримости). Элементами выборок могут быть, например, фрагменты выборочных случайных полей; близость определяется по метрике в адекватном функциональном пространстве (для выборочных элементов или функций от них). Пусть, например, сравниваются выборочные траектории стационарных эргодических гауссовских процессов на некотором интервале времени; гипотеза H_0 состоит в том, что эти процессы идентичны. Здесь естественно применять метрику, учитывающую разность выборочных средних и расстояние (в какой-либо из функциональных норм) между выборочными автоковариациями.

8.4. Отпадает необходимость и в аксиомах метрики. От интерпретации $f(x)$ как ближайшего к x элемента можно перейти к произвольному отображению $f : S \to S$ без неподвижных точек (ради краткости считаем, что все элементы S различны). Формально требуется лишь, чтобы f определялось значениями элементов S и не зависело от их индексации. В то же время с точки зрения чувствительности к альтернативам целесообразно определять $f(x)$ как «наиболее сходный» с x среди остальных элементов выборки S в некотором естественном смысле (связанном с конкретикой задачи).

8.5. Для приложений существенно, что формализация f не обязательна и f может определяться экспертной оценкой. Сравним два варианта экспертизы. При первом эксперту предъявляются выборки $S_1, \ldots, S_m$ и задается вопрос о наличии или отсутствии однородности. Каков бы ни был ответ, надежность его основывается лишь на вере в качественность экспертизы. Второй вариант таков. Эксперту предъявляется выборка S в целом (без указания $S_1, \ldots, S_m$) и предлагается для каждого элемента выборки S указать «наиболее сходный» с ним среди $n-1$ остальных; затем применяется γ-критерий. Здесь при отклонении H_0, т.е. при $\gamma > C(m, \varepsilon)$, вывод делается с уровнем риска, не превосходящим ε — притом без априорных сведений о качестве экспертизы. (Сам факт больших значений γ свидетельствует — в вероятностном смысле — как о нарушении H_0, так и о качественности экспертной оценки).

8.6. Независимость элементов выборки S также не является необходимым требованием. Именно, будем трактовать теперь гипотезу однородности H_0 как перестановочность совместного распределения всех элементов S. Как известно, это менее ограничительное требование содержательно отвечает понятию однородности; в то же время оно достаточно для справедливости утверждения а) § 1. Сама форма γ-критерия показывает, что он ориентирован на альтернативы, допускающие перестановочность не в целом, а лишь внутри выборок $S_1, \ldots, S_m$.

Сказанное выше показывает, что формально γ-критерий применим почти без ограничений — не требуется конечномерности и линейности пространства, независимости выборочных элементов, предположений, связанных с метрикой (да, собственно, и числового характера данных). В части, касающейся ошибок первого рода, при этом ничего не меняется. Правда, при столь «неограниченной» общности уже не гарантируется состоятельность против всех альтернатив.

8.7. Рассмотренный γ-критерий связан с тем соображением, что при неоднородности близкие элементы каждой выборки S_i как бы «тяготеют» друг к другу. Эта идея, конечно, не нова; упомянем, например, классический критерий серий [11] для скалярных выборок, где применяется сходное соображение. Можно предложить другие многомерные статистики родственного характера. Так, естественным выглядит «расширение кругозора», когда учитывается не только ближайший к $x \in S$ элемент $x^1 = f(x)$ среди остальных элементов S, но и последующие — в порядке возрастания расстояний до x — элементы $x^2, x^3, \ldots$. При этом вклад в статистику элемента $x \in S_i$ может определяться числом r таким, что $x^1, \ldots, x^r \in S_i$, $x^{r+1} \notin S_i$. В другом варианте r определяется как минимальное k, при котором $x^k \in S_i$. Пока неизвестно, распространяется ли на соответствующие статистики основной результат; с этой точки зрения применение статистики γ представляется в настоящее время наиболее оправданным.

8.8. В заключение отметим, что проводились достаточно обширные численные эксперименты, которые свидетельствуют о практической эффективности γ-критерия. Так, приемлемый уровень достоверности при выявлении сильно выраженной неоднородности весьма часто обеспечивался уже при малых выборках $S_1, \ldots, S_m$, содержащих не более 5—10 элементов (что вполне естественно). Более подробные данные здесь не приводятся, поскольку полный произвол в выборе плотностей неизбежно придает любым экспериментам весьма частный характер.

Литература

1. *Кендалл, М. Д.* Многомерный статистический анализ и временные ряды / М. Д. Кендалл, А. Стьюарт. — М.: Наука, 1976. — 736 с.
2. *Большев, Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. — М.: Наука, 1965. — 464 с.
3. *Леман, Э.* Проверка статистических гипотез / Э. Леман. — М.: Наука, 1979. — 408 с.
4. *Айвазян, С. А.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичной обработки данных / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 472 с.
5. *Кокс, Д.* Теоретическая статистика / Д. Кокс, Д. Хинкли. — М.: Мир, 1978. — 560 с.
6. *Гаек, Я.* Теория ранговых критериев / Я. Гаек, З. Шидак. — М.: Наука, 1971. — 376 с.
7. *Боровков, А. А.* Математическая статистика. Дополнительные главы / А. А. Боровков. — М.: Наука, 1984. — 144 с.
8. *Левин, А. Ю.* О состоятельном многомерном непараметрическом критерии однородности / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1993. — Т. 48, № 6. — С. 155—156.
9. *Шилов, Г. Е.* Интеграл, мера и производная / Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. — М.: Наука, 1964. — 212 с.
10. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 1980. — 576 с.
11. *Wald, A.* On a test whether two samples are from the same population / A. Wald, J. Wolfowitz // *Ann. Math. Statist.* — 1940. — Vol. 11. — P. 147—162.

Список работ А. Ю. Левина

1. *Левин, А.* К задаче о существовании ортогонального элемента к подпространству / А. Левин // Труды семинара по функцион. анализу. — Воронеж, 1958. — 6. — С. 91—92.
2. *Левин, А. Ю.* О многоточечной краевой задаче / А. Ю. Левин // *Научные доклады высшей школы.* — 1958. — № 5. — С. 34—37.
3. *Левин, А. Ю.* Об одном принципе сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1960. — Т. 135, № 4. — С. 783—786.
4. *Левин, А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1961. — Т. 136, № 5. — С. 1022—1025.
5. *Левин, А. Ю.* О некоторых оценках дифференцируемой функции / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1961. — Т. 138, № 1. — С. 37—38.
6. *Левин, А. Ю.* Об устойчивости решений уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1961. — Т. 141, № 6. — С. 1298—1301.
7. *Левин, А. Ю.* О многоточечной краевой задаче: Дис. . . канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1962. — 112 с.
8. *Бессмертных, Г. А.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г. А. Бессмертных, А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 471—474.
9. *Левин, А. Ю.* О быстроте сходимости метода Ньютона-Канторовича / А. Ю. Левин, В. В. Стрыгин // *УМН.* — 1962. — Т. 17, № 3. — С. 185—187.
10. *Левин, А. Ю.* Об одном критерии устойчивости / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1962. — Т. 17, № 3(105). — С. 211—212.
11. *Красносельский, М. А.* О стабилизации решений оптимальных задач / М. А. Красносельский, А. Ю. Левин // *Выч. матем. и мат. физика.* — 1962. — № 5. — С. 915—921.
12. *Левин, А. Ю.* К вопросу о нулевой зоне устойчивости / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1221—1223.
13. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512—515.
14. *Бахтин, И. А.* Об отыскании экстремума одной функции на многограннике / И. А. Бахтин, М. А. Красносельский, А. Ю. Левин // *Журн. выч. матем. и мат. физики.* — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 400—409.
15. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы, связанные с понятием ортогональности в пространстве Банаха / А. Ю. Левин, Ю. И. Петунин // *УМН.* — 1963. — Т. 18, № 3(111). — С. 167—170.
16. *Левин, А. Ю.* Об одной схеме случайного поиска / А. Ю. Левин,

А. С. Шварц // Труды семинара по функц. анализу. — Воронеж, 1963. — Вып. 7. — С. 67—69.

17. *Левин, А. Ю.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1963. — Т. 153, № 6. — С. 1257—1260.
18. Некоторые краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений / А. В. Кибенко, М. А. Красносельский, А. Ю. Левин, А. И. Перов // Труды IV Всесоюз. матем. съезда. — Л., 1964. — Т. 2. — С. 437—444.
19. *Левин, А. Ю.* О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1281—1284.
20. *Левин, А. Ю.* Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 64(106), № 3. — С. 396—409.
21. *Левин, А. Ю.* Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1964. — Т. 159, № 1. — С. 13—16.
22. *Левин, А. Ю.* Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1965. — Т. 20, № 2 (122). — С. 244—246.
23. *Левин, А. Ю.* Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1965. — Т. 160, № 6. — С. 1244—1247.
24. Об оптимальных задачах с нелинейностями типа наладок / П. П. Забрейко, Ю. С. Колесов, М. А. Красносельский и др. // Тезисы докл. конф. по матем. оптим. программированию. — Новосибирск, 1965. — С. 14—16.
25. *Левин, А. Ю.* Алгоритм центрированных сечений / А. Ю. Левин // Тезисы докл. конф. по матем. оптим. программированию. — Новосибирск, 1965. — С. 28.
26. *Красносельский, М. А.* Об оценках решений дифференциальных уравнений второго порядка / М. А. Красносельский, А. Ю. Левин, Я. Д. Мамедов // *Укр. мат. журнал.* — 1966. — Т. 18, № 1. — С. 110—116.
27. *Левин, А. Ю.* «Сходящиеся» системы линейных уравнений / А. Ю. Левин // Тезисы докладов Московского математического конгресса. — Секция 6. — 1966. — С. 32—33.
28. *Левин, А. Ю.* Классификация неколебательных случаев для уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ со знакопостоянной $q(t)$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1966. — Т. 171, № 5. — С. 1037—1040.
29. *Акулова, Л. Г.* Способы расчета надежности связей в коммуникационных системах / Л. Г. Акулова, А. Ю. Левин // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1967. — Вып. 1. — С. 5—11.

30. *Колесов, Ю. С.* О знаке функции Грина некоторых периодических краевых задач / Ю. С. Колесов, А. Ю. Левин // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1967. — Вып. 1. — С. 40—43.
31. *Левин, А. Ю.* К принципу обобщенного сжатия М. А. Красносельского / А. Ю. Левин, Е. А. Лифшиц // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1967. — Вып. 1. — С. 49—52.
32. Решение одной игры на графах / В. М. Герштейн, Б. П. Кац, А. Ю. Левин, Б. С. Митягин // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1967. — Вып. 1. — С. 28—37.
33. *Вишняков, В. М.* Оценка определителя, элементы которого лежат в данном круге / В. М. Вишняков, А. Ю. Левин // *Матем. заметки.* — 1967. — Т. 1:6. — С. 659—664.
34. *Левин, А. Ю.* Выпуклые и квазивыпуклые системы уравнений / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1967. — Т. 22, № 3(135). — С. 235—236.
35. *Левин, А. Ю.* К теории уравнения $\ddot{x} + (1 + \varepsilon(t))x = 0$ (Заседания Московского математического общества) / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1967. — Т. 22, № 5(137). — С. 176—177.
36. *Левин, А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774—777.
37. *Левин, А. Ю.* Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1968. — Т. 75 (117), № 1. — С. 39—63.
38. *Левин, А. Ю.* Элементарный признак вещественности корней целой функции с положительными коэффициентами / А. Ю. Левин // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1968. — Вып. 2. — С. 72—77.
39. *Левин, А. Ю.* Программа анализа одной позиционной игры для ЭЦВМ “Раздан-2” / А. Ю. Левин, О. Ф. Ускова // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научно-исследовательских и народнохозяйственных задач. — Воронеж, 1968. — Вып. 1. — С. 92—105.
40. *Левин, А. Ю.* Квазишахматные композиции ЭВМ / А. Ю. Левин, О. Ф. Ускова // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научно-исследовательских и народнохозяйственных задач. — Воронеж, 1969. — Вып. 4. — С. 28—32.
41. *Левин, А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43—96.
42. *Левин, А. Ю.* Вопросы качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения: Дис. ... доктора физ.-мат. наук / Воронеж. — 1970. — 370 с.

43. *Левин, А. Ю.* Кратчайшее соединение группы вершин графа / А. Ю. Левин // Труды НИИ математики ВГУ. — Воронеж, 1970. — Вып. 2. — С. 6—17.
44. *Левин, А. Ю.* Повторение игр двух лиц на больших интервалах времени / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1970. — Т. 192, № 1. — С. 23—25.
45. *Левин, А. Ю.* Алгоритм кратчайшего соединения группы вершин графа / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 773—776.
46. *Левин, А. Ю.* Охота на мустанга / А. Ю. Левин, О. Ф. Ускова // *Наука и жизнь*. — 1972. — № 5. — С. 114—116.
47. *Левин, А. Ю.* Факторизация Пойа—Маммана в периодическом случае / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1973. — Вып. 2. — С. 57—59.
48. *Левин, А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1973. — Вып. 5. — С. 105—132.
49. *Левин, А. Ю.* Замечание о колебательности уравнения $\ddot{x} + p(t,\lambda)\dot{x} + q(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1973. — Вып. 5. — С. 133—134.
50. *Левин, А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. II / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1974. — Вып. 8. — С. 122—144.
51. *Левин, А.* О порядке соединений в задаче плоской трассировки / А. Левин, Ш. К.Н. // *Управляющие системы и машины*. — 1974. — № 3. — С. 117—122.
52. *Левин, А. Ю.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака / А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов // *УМН*. — 1975. — Т. 30, № 1(181). — С. 245—246.
53. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы асимптотики для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1975. — Т. 225, № 3. — С. 503—506.
54. *Левин, А. Ю.* О соединении пар точек непересекающимися путями / А. Ю. Левин, О. Ф. Ускова // Эвристические алгоритмы оптимизации: Межвузов. темат. сб. — Ярославль: ЯрГУ, 1975. — Вып. 9. — С. 61—76.
55. *Левин, А. Ю.* Линейное оптимальное быстродействие и центрированные сечения / А. Ю. Левин // Эвристические алгоритмы оптимизации: Межвузов. темат. сб. — Ярославль: ЯрГУ, 1975. — Вып. 12. — С. 87—93.
56. *Левин, А. Ю.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I / А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов // *Сиб. матем. журн.* — 1976. — Т. 17, № 3. — С. 606—626.
57. *Левин, А. Ю.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. II / А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов // *Сиб. матем. журн.* — 1976. — Т. 17, № 4. — С. 813—830.

58. *Левин, А. Ю.* Об оценке снизу плотности графа / А. Ю. Левин // Эвристические алгоритмы оптимизации: Межвузов. темат. сб. — Ярославль: ЯрГУ, 1978. — С. 79—87.
59. *Васильчиков, В. В.* О средней трудоемкости нахождения максимального полного подграфа в случайном графе / В. В. Васильчиков, А. Ю. Левин // Эвристические алгоритмы оптимизации: Межвузов. темат. сб. — Ярославль: ЯрГУ, 1981. — С. 61—64.
60. *Левин, А. Ю.* Об экспериментальной трудоемкости полностью целочисленного метода Гомори / А. Ю. Левин, Н. А. Новиков // Эвристические алгоритмы оптимизации: Межвузов. темат. сб. — Ярославль: ЯрГУ, 1981. — С. 65—69.
61. *Левин, А. Ю.* Факторизация и непонижение осцилляции на окружности / А. Ю. Левин // Proc. Conf. “Equadiff 5”. — Vol. 47. — Leipzig: Teubner-Texte Math., 1982. — P. 226—227.
62. *Белов, Ю. А.* Об одном свойстве выпуклых многогранников / Ю. А. Белов, А. Ю. Левин // *Вопросы теории групп и гомологической алгебры: Межвузов. сб.* — 1983. — С. 57—58.
63. *Копылов, Г. Н.* О реализуемости стохастического многопродуктового потока / Г. Н. Копылов, А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1984. — Т. 276, № 5. — С. 1053—1055.
64. Принципы построения локальной вычислительной сети для центра коммутации сообщений / Ю. А. Маматов, Н. М. Бадин, С. Ф. Булычев и др. // *Автоматика и вычислительная техника*. — 1986. — № 4. — С. 53—57.
65. *Енчева, Т. И.* О локализации точек переключения оптимального управления / Т. И. Енчева, А. Ю. Левин // *Моделирование и анализ вычислительных систем: Межвузов. сб.* — 1987. — С. 135—140.
66. *Енчева, Т. И.* Локализация нулей квазиполиномов, возникающих в задаче оптимального линейного быстродействия / Т. И. Енчева, А. Ю. Левин // *Доклады БАНД*. — 1988. — Т. 41, № 2. — С. 51—54.
67. *Encheva, T. I.* On computationally implementable variants of the method of centers of gravity / T. I. Encheva, A. Y. Levin, D. L. Vandev // *Math. Balk., New Ser.* — 1988. — Vol. 2, no. 2—3. — P. 156—164.
68. *Левин, А. Ю.* Критерий абсолютной неосцилляционной устойчивости для уравнений n-го порядка / А. Ю. Левин // *УМН*. — 1988. — Т. 43, № 5(263). — С. 203—204.
69. *Encheva, T. I.* Zeros of quasi-polynomials and linear time-optimal control problem / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *Math. Balk., New Ser.* — 1988. — Vol. 2, no. 4. — P. 296—305.
70. *Encheva, T. I.* Central sections in quasi-convex programming / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *C. R. Acad. Bulg. Sci.* — 1989. — Vol. 42, no. 11. — P. 39—42.

71. *Левин, А. Ю.* О логике математической статистики: Текст лекций по курсу «Доп. главы математической статистики» / А. Ю. Левин, В. В. Майоров. — Ярославль: ЯрГУ, 1989. — 44 с.
72. *Encheva, T. I.* Central sections in linear time-optimal control problems / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *C. R. Acad. Bulg. Sci.* — 1990. — Vol. 43, no. 2. — P. 13—16.
73. *Encheva, T. I.* Finding the zeros of exponential quasi-polynomials / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *Serdica.* — 1990. — Vol. 16, no. 2. — P. 151—159.
74. *Левин, А. Ю.* О стратегии распознавания движения в условиях помех / А. Ю. Левин, А. Н. Малков // Тезисы докл. XI Всесоюзн. конф. «Проблемы теор. кибернетики». — Волгоград, 1990. — С. 30.
75. *Левин, А. Ю.* (r, R)-стратегии обнаружения траектории цели в радиолокации / А. Ю. Левин, А. Н. Малков // Вычислительные системы и их модели: сб. науч. тр. / Под ред. Ю. А. Маматова. — Ярославль: ЯрГУ, 1990. — С. 139—149.
76. Метод обнаружения и выделения движущихся объектов на последовательности зашумленных астроснимков / В. А. Бондаренко, А. А. Короткин, А. Ю. Левин, А. Н. Малков // Труды межрегиональн. семинара «Системы цифр. обработки и анализа изображений». — Рига, 1991. — С. 65—67.
77. *Левин, А. Ю.* Абсолютная неосцилляционная устойчивость и смежные вопросы / А. Ю. Левин // *Алгебра и анализ.* — 1992. — Т. 4, № 1. — С. 154—166.
78. *Левин, А. Ю.* О состоятельном многомерном непараметрическом критерии однородности / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1993. — Т. 48, № 6. — С. 155—156.
79. *Korolev, N.* Estimating the Certainty of Matching Point Images / N. Korolev, A. Levin // *Pattern Recognition and Image Analysis.* — 1995. — Vol. 5, no. 2. — P. 226—237.
80. *Левин, А. Ю.* Несколько слов о себе и учениках / А. Ю. Левин // Актуальные проблемы естеств. и гуманитарн. наук. Математика. Информатика : Тезисы юбилейной конференции / ЯрГУ. — Ярославль, 1995. — С. 4—7.
81. *Левин, А. Ю.* Теорема Харитонова для слабонестационарных систем / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1995. — Т. 50, № 6(306). — С. 189—190.
82. *Акулова, Л. Г.* Стохастическая независимость: Методические указания по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» / Л. Г. Акулова, А. Ю. Левин. — Ярославль: ЯрГУ, 1997. — 32 с.
83. *Левин, А. Ю.* Что такое комбинаторика / А. Ю. Левин // *Квант.* — 1999. — № 5. — С. 2—9.
84. *Левин, А. Ю.* Что такое комбинаторика / А. Ю. Левин // *Квант.* —

1999. — № 6. — С. 7—12.
85. *Левин, А. Ю.* О состоятельном многомерном непараметрическом критерии однородности / А. Ю. Левин // *Моделирование и анализ информационных систем.* — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 32—44.
86. *Левин, А. Ю.* О логике математической статистики: Текст лекций по курсу «Доп. главы математической статистики» / А. Ю. Левин, В. В. Майоров, М. Л. Мячин. — 2-е переработанное и дополненное изд. — Ярославль: ЯрГУ, 2003. — 44 с.
87. *Левин, А. Ю.* О развитии вероятностно-статистического мышления / А. Ю. Левин // Математика, кибернетика, информатика: Тр. междунар. науч. конф. памяти А. Ю. Левина. — Ярославль: Яросл. гос. ун-т, 2008. — С. 5—13.

Список работ А. Ю. Левина, переведенных на английский язык

1. *Levin, A. Y.* A comparison principle for second-order differential equations / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1960. — Vol. 1. — P. 1313—1316.
2. *Levin, A. Y.* Differential properties of Green's function in a many point boundary value problem / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1961. — Vol. 2. — P. 154—157.
3. *Levin, A. Y.* On some estimates of a differentiable function / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1961. — Vol. 2. — P. 523—524.
4. *Levin, A. Y.* On the stability of solutions of equation of second order / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1961. — Vol. 2. — P. 1642—1646.
5. *Bessmertnykh, G. A.* Über gewisse Abschätzungen differenzierbarer Funktionen einer Veränderlichen / G. A. Bessmertnykh, A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1962. — T. 3. — C. 737—740.
6. *Krasnosel'skij, M. A.* On the stabilisation of the solution of optimal problems / M. A. Krasnosel'skij, A. Y. Levin // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* — 1963. — P. 1065—1073.
7. *Levin, A. Y.* On the question of the zeroth stability zone / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1962. — Vol. 3. — P. 1196—1198.
8. *Levin, A. Y.* Some problems bearing on the oscillation of solutions of linear differential equations / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1963. — Vol. 4. — P. 121—124.
9. *Bakhtin, I. A.* Finding the extremum of a function on a function on a polyhedron / I. A. Bakhtin, M. A. Krasnosel'skij, A. Y. Levin // *Comput. Math. Math. Phys.* — 1963. — no. 3. — P. 533—546.

10. *Levin, A. Y.* Linear differential equations of second order / A. Y. Levin // *Sov. Math. Dokl.* — 1963. — Vol. 4. — P. 1814—1817.
11. *Levin, A. Y.* Distribution of the zeros of solutions of a linear differential equation / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1964. — Vol. 5. — P. 818—821.
12. *Levin, A. Y.* Abschätzung für eine Funktion mit monoton geordneten Nullstellen der sukzessiven Ableitungen / A. Y. Levin // *Mat. Sb., N. Ser.* — 1964. — Vol. 64(106). — P. 396—409.
13. *Levin, A. Y.* A Fredholm equation with a smooth kernel and boundary-value problems for a linear differential equation / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1964. — Vol. 5. — P. 1415–1419.
14. *Levin, A. Y.* On an algorithm for the minimization of convex function / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1965. — no. 6. — P. 268—290.
15. *Levin, A. Y.* Classification of nonoscillatory cases for the equation $\ddot{x} + {} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ where $q(t)$ is of constant sign / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1966. — Vol. 7. — P. 1599–1603.
16. *Vishnyakov, M. V.* Bounds for a determinant whose elements lie in a given circle / M. V. Vishnyakov, A. Y. Levin // *Mathematical Notes*. — 1967. — Vol. 1, no. 6. — P. 438—441.
17. *Levin, A. Y.* Passage to the limit for nonsingular systems $\dot{X} = A_n(t)X$ / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1967. — Vol. 8. — P. 1194—1197.
18. *Levin, A. Y.* Behavior of the solutions of the equation $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x = 0$ in the nonoscillatory case / A. Y. Levin // *Math. USSR, Sb.* — 1968. — Vol. 4. — P. 33—55.
19. *Levin, A. Y.* Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+ {} + \cdots + p_n(t)x = 0$ / A. Y. Levin // *Russ. Math. Surv.* — 1969. — Vol. 24, no. 2. — P. 43—99.
20. *Levin, A. Y.* The repetition of two-person games at long time intervals / A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1970. — Vol. 11. — P. 570—572.
21. *Kopylov, G. N.* On the realizability of a stochastic multiproduct flow / G. N. Kopylov, A. Y. Levin // *Sov. Math., Dokl.* — 1984. — Vol. 29. — P. 631—633.
22. *Encheva, T. I.* On computationally implementable variants of the method of centers of gravity / T. I. Encheva, A. Y. Levin, D. L. Vandev // *Math. Balk., New Ser.* — 1988. — Vol. 2, no. 2—3. — P. 156—164.
23. *Levin, A. Y.* A criterion for absolute disconjugate stability for nth-order equations / A. Y. Levin // *Russ. Math. Surv.* — 1988. — Vol. 43, no. 5. — P. 244—245.
24. *Encheva, T. I.* Zeros of quasi-polynomials and linear time-optimal control problem / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *Math. Balk., New Ser.* — 1988. — Vol. 2, no. 4. — P. 296—305.
25. *Encheva, T. I.* Central sections in quasi-convex programming / T. I. Enche-

va, A. Y. Levin // *C. R. Acad. Bulg. Sci.* — 1989. — Vol. 42, no. 11. — P. 39—42.
26. *Encheva, T. I.* Central sections in linear time-optimal control problems / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *C. R. Acad. Bulg. Sci.* — 1990. — Vol. 43, no. 2. — P. 13—16.
27. *Encheva, T. I.* Finding the zeros of exponential quasi-polynomials / T. I. Encheva, A. Y. Levin // *Serdica.* — 1990. — Vol. 16, no. 2. — P. 151—159.
28. *Levin, A. Y.* On a consistent multidimensional non-parametric test for homogeneity / A. Y. Levin // *Russ. Math. Surv.* — 1993. — Vol. 48, no. 6. — P. 164—165.
29. *Korolev, N.* Estimating the Certainty of Matching Point Images / N. Korolev, A. Levin // *Pattern Recognition and Image Analysis.* — 1995. — Vol. 5, no. 2. — P. 226—237.
30. *Levin, A. Y.* Kharitonov's theorem for weakly non-stationary systems / A. Y. Levin // *Russ. Math. Surv.* — 1995. — Vol. 50, no. 6. — P. 1280—1281.

Научное издание

Анатолий Юрьевич Левин

Избранные труды

Корректор А. А. Аладьева
Компьютерная верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 01.11.2010. Формат $70 \times 100/16$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,8. Уч.-изд. л. 20,2.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная.
Тираж 500 экз. Заказ № 1179

Оригинал-макет подготовлен
в Управлении научных исследований и инноваций ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.
http://www.uniyar.ac.ru
Отпечатано в ОАО «Рыбинский Дом печати»
152901, Ярославская обл., г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8.